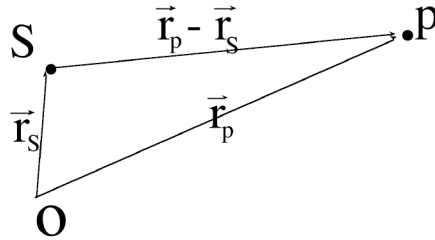


IL PROBLEMA DI DUE CORPI IN INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

Le equazioni della dinamica per i due corpi puntiformi S e p sono

$$m_p \vec{a}_p = \vec{F}_{s,p} = -G \frac{m_s m_p}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_s)$$

$$m_s \vec{a}_s = \vec{F}_{p,s} = -G \frac{m_s m_p}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_s - \vec{r}_p)$$

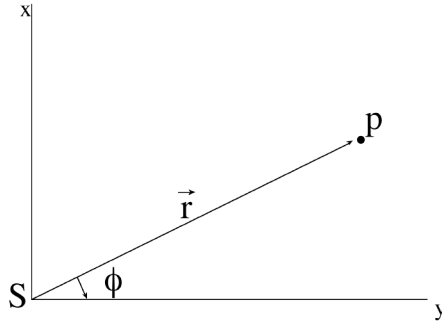


moltiplicando la prima equazione per m_s , la seconda per m_p , sottraendo e dividendo per la somma delle due masse si ottiene

$$\mu(\vec{a}_p - \vec{a}_s) = -G \frac{m_s m_p}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_s)$$

con $\mu = m_s m_p / (m_s + m_p) = m_p / (1 + m_p / m_s)$ ($\sim m_p$ se $m_p / m_s \ll 1$).
Ponendo $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s$, posizione relativa di p rispetto a S, si ha

$$\mu \vec{a} = -G \frac{m_s m_p}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$



La coordinata relativa soddisfa dunque l'equazione della dinamica di un corpo puntiforme di massa μ attratto verso l'origine da un corpo di massa $m_s m_p / \mu$ ($\sim m_s$ se $m_p / m_s \ll 1$).

Essendo la forza centrale, si conservano il momento della quantità di moto rispetto ad S , che denoteremo con \vec{L} , e l'energia totale E

$$\vec{L} / \mu = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \quad (1)$$

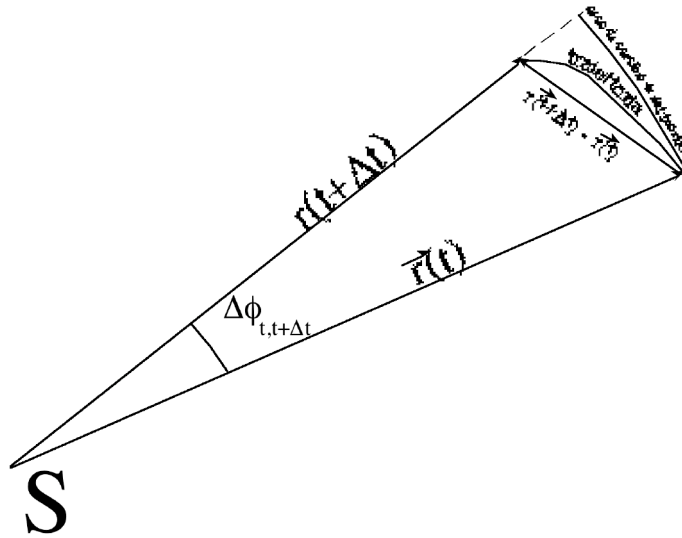
$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{m_s m_p}{r} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - G \frac{m_s m_p}{r_0} \quad (2)$$

Vi sono alcune conseguenze immediate delle (1) e (2) che ricordiamo qui di seguito:

- a) Il piano dell'orbita rimane ad ogni istante quello individuato da \vec{r}_0 e da \vec{v}_0 ;
- b) La velocità areolare è costante.

Prima di provare questo risultato, si noti che se il moto è osservato dalla parte del vettore costante \vec{L} il raggio vettore \vec{r} non può ruotare che in senso antiorario; supporremo sempre di osservare il moto da questa direzione. Se il moto è descritto tramite coordinate polari r e φ questo significa che φ non può che crescere al passare del tempo, cioè che $\frac{d\varphi}{dt} \geq 0$ sempre. Dalla figura si vede che:

$$\text{Area}_{t, t+\Delta t} \sim \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \wedge (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t))| \sim \frac{1}{2} r(t)^2 \Delta \varphi_{t, t+\Delta t}$$



dove

$\text{Area}_{t,t+\Delta t}$ è l'area compresa tra i vettori posizione ai tempi t e $t + \Delta t$ e la traiettoria di p ;

il secondo membro è l'area del triangolo compreso tra i vettori posizione, agli stessi due tempi, e la loro differenza;

il terzo membro è l'area del settore circolare di raggio $r(t)$ e di ampiezza angolare pari all'incremento dell'angolo φ tra i tempi t e $t + \Delta t$.

Le tre aree differiscono per termini di ordine $(\Delta t)^2$ (questo è il significato dei "circa" nella relazione precedente). Dividendo per Δt , nel limite in cui Δt tende a 0 si ricava

$$\Xi = dA/dt = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) \right| = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{cost.}$$

c) Se $E < 0$ l'orbita rimane in una regione limitata

Infatti: Energia cinetica = $E + G \frac{m_s m_p}{r} \geq 0$ da cui

$$G \frac{m_s m_p}{r} \geq -E \quad \text{ovvero} \quad r \leq \frac{G m_p m_s}{|E|}$$

Equazione della traiettoria

Vogliamo mostrare come primo risultato il seguente:

grafico delle velocità: se da S si tracciano i vettori velocità di p si ottiene un cerchio di raggio $G m_s m_p / L$.

Infatti

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -G \frac{m_s m_p}{\mu r^2} \cos \varphi$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -G \frac{m_s m_p}{\mu r^2} \sin \varphi$$

dalla formula per la velocità areolare

$$\frac{dv_x}{d\varphi} = \frac{dv_x}{dt} / \frac{d\varphi}{dt} = -G \frac{m_s m_p}{\mu 2\Xi} \cos \varphi = -G \frac{m_s m_p}{L} \cos \varphi$$

$$\frac{dv_y}{d\varphi} = \frac{dv_y}{dt} / \frac{d\varphi}{dt} = -G \frac{m_s m_p}{\mu 2\Xi} \sin \varphi = -G \frac{m_s m_p}{L} \sin \varphi$$

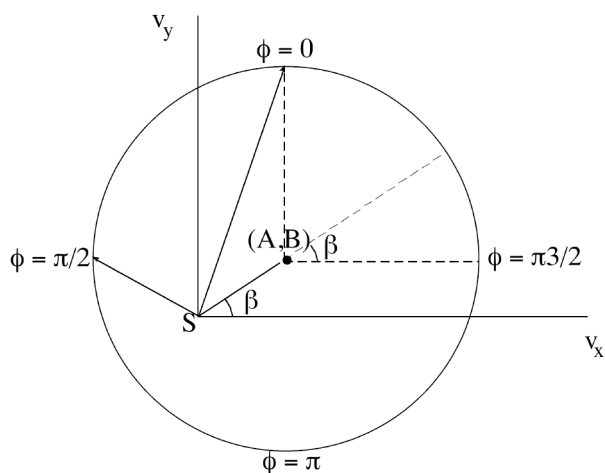
da cui si ricava immediatamente

$$v_x = -G \frac{m_s m_p}{L} \sin \varphi + A$$

$$v_y = G \frac{m_s m_p}{L} \cos \varphi + B$$

$$(v_x - A)^2 + (v_y - B)^2 = \left(G \frac{m_s m_p}{L}\right)^2$$

E' chiaro che ruotando l'asse polare (da cui si cominciano a contare gli angoli) è possibile porre una delle costanti di integrazione uguale a 0.

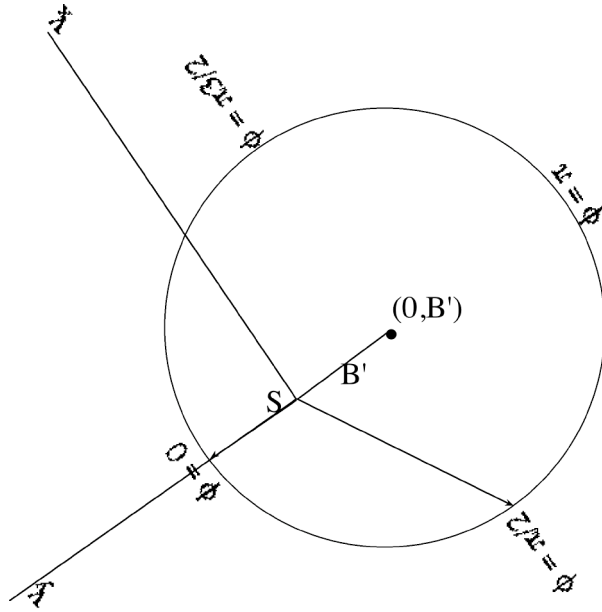


Per convincercene supponiamo inizialmente di essere nella condizione indicata in figura, cioè che S si trovi dentro il cerchio delle velocità ($A^2 + B^2 < (G \frac{m_s m_p}{L})^2$). Si può notare che con una rotazione di $\varphi = \pi/2 - \beta$ in senso orario, oppure con una rotazione di $\varphi = \pi/2 + \beta$ in senso antiorario, si può portare l'asse v_y a coincidere con l'asse polare $\varphi = 0$ (si noti che una rotazione dell'asse polare, oltre a far ruotare la “rosa” dei φ sul cerchio, induce una identica rotazione del sistema di assi V_x, V_y intorno ad S). Nel primo caso $\varphi = 0$ corrisponderebbe al punto di velocità massima (e quindi di distanza minima da S , perielio) e $\varphi = \pi$ al punto di velocità minima (e quindi di distanza massima da S , afelio). Nel secondo caso i punti di perielio e afelio corrisponderebbero rispettivamente a $\varphi = \pi$ e a $\varphi = 0$. Supponendo di aver fatto la seconda scelta, le equazioni diventano:

$$v_x = -G \frac{m_s m_p}{L} \sin \varphi$$

$$v_y = G \frac{m_s m_p}{L} \cos \varphi + B'$$

dove risulterà $B' < 0$ come è evidente dalla successiva figura.



La forma della traiettoria di p si deduce facilmente dal risultato precedente. Scrivendo, in termini delle coordinate cartesiane, l'eguaglianza $\vec{L}/\mu = \vec{r} \wedge \vec{v}$ ovvero $xv_y - yv_x = L/\mu$ si ottiene

$$rG \frac{m_s m_p}{L} \cos^2 \varphi + B' r \cos \varphi + rG \frac{m_s m_p}{L} \sin^2 \varphi = L/\mu$$

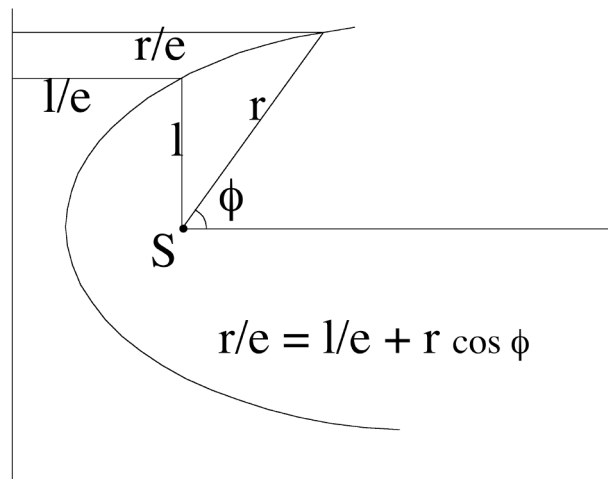
cioè

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \varphi} \quad (3)$$

con $l = L^2/Gm_s m_p \mu$ e $e = |B'|L/Gm_s m_p$ (< 1 se S è interno al cerchio delle velocità). È facile controllare che si ottiene la stessa equazione nei casi in cui S si trovi sul cerchio o esterno ad esso; il corrispondente valore di e risulterebbe rispettivamente uguale o maggiore di 1.

L'equazione (3) con $e < 1$ descrive un'ellisse con un fuoco nell'origine ed eccentricità (rapporto tra distanza tra i fuochi e asse maggiore) pari a e . In effetti è semplice provare la seguente caratterizzazione delle coniche: una conica è il luogo geometrico dei punti di un piano le cui distanze da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice hanno un rapporto pari ad e . La conica sarà un'ellisse, una parabola o un'iperbole a seconda che e sia rispettivamente minore, uguale o maggiore di 1.

Da tale caratterizzazione discende subito (vedi figura) che, rispetto ad un sistema di coordinate polari con origine nel fuoco e asse polare perpendicolare alla direttrice (nel verso che si allontana da essa), l'equazione di una conica è sempre del tipo (3) con l uguale alla distanza dal fuoco del punto corrispondente a $\varphi = \pi/2$.



Per chi avesse maggior familiarità con la caratterizzazione delle coniche attraverso equazioni per le coordinate cartesiane notiamo che con la sostituzione $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos \varphi = x/r$ la (3) diventa

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2lex = l^2$$

cioè della forma

$$\frac{(x - le/(1 - e^2))^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1$$

(con a rapidamente calcolabile).

La traiettoria è quindi un'ellisse ed è facile convincersi che ha S come fuoco.

Per concludere il calcolo, B' dovrà essere espresso in termini delle condizioni iniziali ovvero delle costanti del moto. Sostituendo nella formula dell'energia i valori di velocità e posizione calcolati per $\varphi = \pi/2$ si ricava

$$\frac{\mu}{2} \left[\left(G \frac{m_s m_p}{L} \right)^2 + (B')^2 \right] = G \frac{m_s m_p}{l} + E,$$

da cui, sostituendo il valore di l , si ha

$$\left(G \frac{m_s m_p}{L} \right)^2 + 2E/\mu = |B'|^2$$

e quindi

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(Gm_s m_p)^2}}$$

La traiettoria è quindi ellittica se e solo se l'energia E risulta minore di zero. In questo caso il moto risulta periodico e possiamo facilmente calcolare il periodo di rivoluzione dividendo l'area totale dell'ellisse per la velocità areolare costante con la quale l'orbita viene percorsa.

$$T = \frac{\pi ab}{L/2\mu} = \frac{\pi(1 - e^2)^{1/2} a^2}{L/2\mu}$$

dove a e b sono rispettivamente gli assi maggiore e minore dell'ellisse. La distanza tra l'afelio ed il perielio (pari a $2a$) può essere calcolata sommando le distanze da S dell'afelio e del perielio, cioè dei due punti che nell'equazione della traiettoria in coordinate polari corrispondono rispettivamente ai valori $\phi = 0$ e $\phi = \pi$

$$2a = \frac{L^2}{Gm_s m_p \mu} \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right)$$

eliminando L dalle due espressioni per T e per a si trova finalmente

$$T = 2a^{3/2} \frac{\pi}{Gm_s^{1/2}} \left(\frac{\mu}{m_p} \right)^{1/2}$$

che prova la terza legge di Keplero. Si noti che la costante di proporzionalità tra quadrato dei tempi di rivoluzione e cubo del semiasse maggiore dipende debolmente dalla massa del pianeta attraverso il fattore $\frac{\mu}{m_p}$, che risulta comunque molto vicino a 1 se la massa del sole è molto più grande della massa dei pianeti.

I DIAGRAMMI DI NEWTON

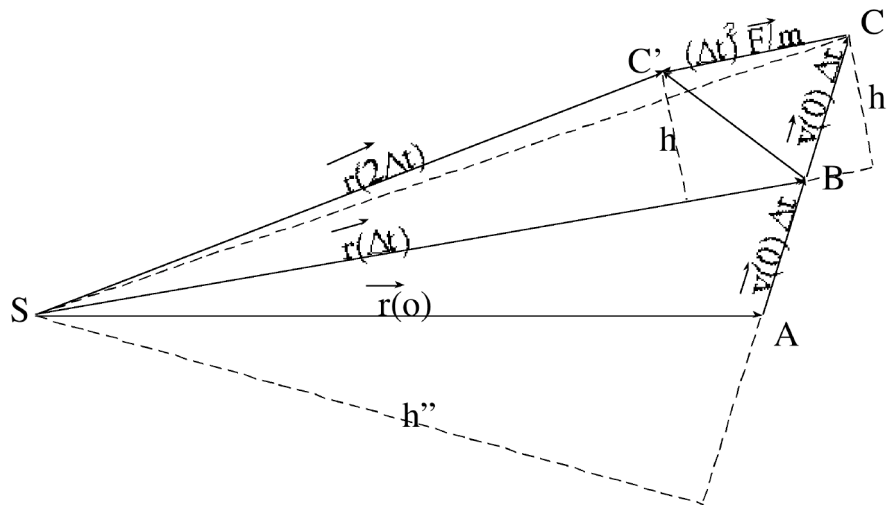
Newton costruì le sue dimostrazioni sul problema delle orbite attraverso diagrammi costruiti come segue:

dalla posizione iniziale si opera uno spostamento pari alla velocità iniziale moltiplicata per un intervallo di tempo piccolo preassegnato Δt , come se il corpo fosse avanzato nel periodo Δt con velocità costante. Si calcola l'impulso della forza di attrazione gravitazionale nello stesso periodo approssimandolo con il prodotto della forza all'istante finale per Δt ; la velocità nel periodo successivo viene presa pari a quella precedente più il rapporto tra l'impulso e la massa del punto e così via. Il limite geometrico, per Δt che tende a 0, della spezzata così costruita sarà la traiettoria del corpo puntiforme.

Di seguito rileggiamo i risultati, ottenuti precedentemente tramite calcolo analitico, in termini di diagrammi di questo tipo.

a) Costanza della velocità areolare

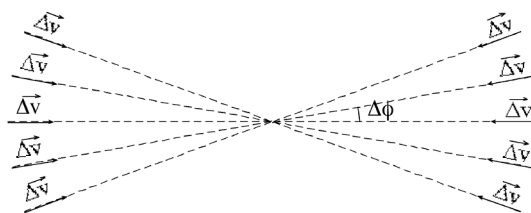
Lo spostamento BC' nel secondo intervallo Δt è la somma dello spostamento BC che il punto avrebbe se continuasse con velocità $\vec{v}(0)$ più lo spostamento $\vec{\Delta v}(\Delta t)$, dove la variazione di velocità è approssimata con $(\Delta t)\vec{F}/m$ in cui \vec{F} è presa all'istante Δt ed è quindi diretta da B verso S . Essendo CC' parallelo a BS , h ed h' , perpendicolari a SB , hanno la stessa lunghezza e le aree dei triangoli $SC'B$ e SCB , con base comune SB e uguali altezze, sono uguali. Del resto i triangoli SAB e SBC hanno la stessa area essendo le due basi AB e BC uguali e l'altezza h'' comune. L'area spazzata nel primo Δt è quindi uguale a quella spazzata nel Δt successivo. Si noti che il risultato è valido qualunque sia CC' , parallelo a BS , quindi qualunque sia la forza \vec{F} purchè sia centrale.



b) Il grafico delle velocità è un cerchio

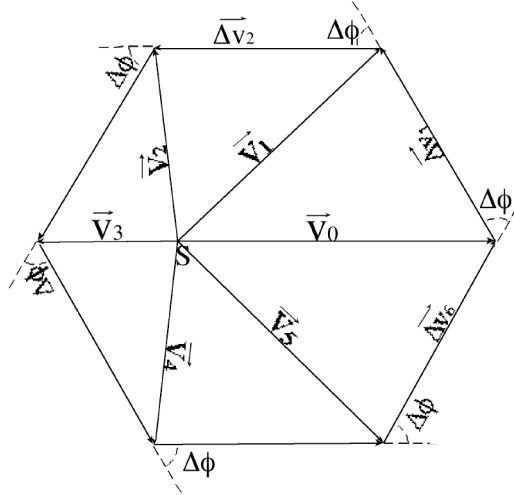
Preso come origine il centro attrattore S dividiamo il piano dell'orbita in settori di angolo $\Delta\varphi = 2\pi/N$ per N molto grande e analizziamo la traiettoria quando passa da una retta limite di un settore a quella successiva.

Le variazioni di velocità quando l'angolo incrementa di $\Delta\varphi$ sono tutte uguali e dirette radialmente: infatti la variazione di velocità è proporzionale all'impulso $(\Delta t)\vec{F}$, dove (Δt) è il tempo che il punto impiega perché l'angolo incrementi di $\Delta\varphi$. Poiché la velocità areolare è costante, tale intervallo di tempo è proporzionale al quadrato della distanza; essendo la forza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza l'impulso è costante in ciascun settore.



Come si vede dalla figura che segue, l'aggiunta ad una qualunque velocità

iniziale di vettori di modulo costante, ruotati ciascuno rispetto al precedente di un angolo costante $\Delta\varphi = 2\pi/N$, chiude un poligono regolare di N lati.



In una lezione, diventata recentemente un libro, Richard Feynman procede da questo risultato a provare l'ellitticità delle orbite con una costruzione puramente geometrica che non richiede alcuna conoscenza di calcolo infinitesimale. Come abbiamo visto in precedenza questa parte della dimostrazione non richiede comunque strumenti troppo sofisticati di analisi matematica.