UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in FISICA

Esercitazioni
di
MECCANICA e TERMODINAMICA

Anno Accademico 2016–2017

UNITÀ **C**

Dinamica dei Sistemi e dei Corpi rigidi

[a cura di Alberto Clarizia]

1 Dinamica dei Sistemi di corpi puntiformi

1.1 Centro di massa. Conservazione della quantità di moto totale e generalizzazione del Teorema delle forze vive

Esercizio 1.1 Un canarino viene racchiuso in un recipiente di vetro, a tenuta d'aria. Il recipiente viene poi appeso ad una molla e si attende che il sistema si metta in equilibrio (con la molla ovviamente allungata) col canarino sul fondo.

Se, a partire da tale condizione, il canarino si leva in volo, che cosa farà inizialmente il recipiente? Si abbasserà, si innalzerà o rimarrà fermo?

Esercizio 1.2 Un carrello di massa $m = 300\,kg$ può scorrere con attrito trascurabile sopra due binari rettilinei orizzontali. Il carrello è fermo e su di esso si trova seduta una persona di massa $m_1 = 50\,kg$. La persona si alza in piedi, cammina sopra il piano del carrello in direzione dei binari e poi si siede nuovamente: rispetto al suolo la posizione finale della persona dista $d_1 = 6\,m$ da quella iniziale.

Si calcoli lo spostamento d subito dal carrello e lo spostamento $d_{\rm rel}$ della persona sul carrello.

Esercizio 1.3 Un uomo di massa M si trova nel centro di uno stagno ghiacciato perfettamente liscio; il centro è più basso delle sponde di una quota h. Si calcoli la velocità iniziale con cui l'uomo dovrebbe lanciare davanti a sé un sasso di massa m per uscire dallo stagno.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 70\,kg$; $h = 10\,cm$; $m = 800\,g$.

Esercizio 1.4 Un blocco omogeneo (di sezione verticale rettangolare), di massa M, lunghezza l e altezza h, è libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Sul piano superiore del blocco, una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo $l_0 = l$, è vincolata per un estremo ad una estremità del piano; all'altro estremo è appoggiato un blocchetto puntiforme, di massa m, che si può muovere senza attrito (vedi la figura 1). All'istante iniziale, tutto è fermo e la molla è compressa, poi il sistema viene lasciato libero.

a) Sia δ_1 la compressione della molla; determinare la velocità relativa con cui il blocchetto lascia la superficie del blocco.

b) Quale sarebbe la compressione della molla δ_2 se venisse misurata una distanza L tra lo spigolo inferiore del blocco e il punto in cui il blocchetto tocca il suolo, nell'istante in cui tocca il suolo?

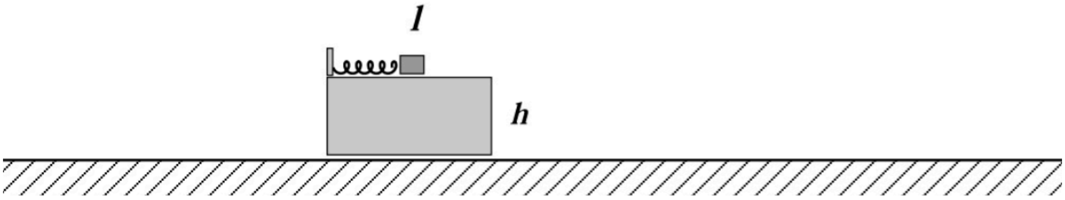

Figura 1: descrizione dell'esercizio **1.4**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 400\,g$; $l = 0.80\,m$; $h = 0.40\,m$; $m = 100\,g$; $k = 8\,N/m$; $\delta_1 = 0.60\,m$; $L = 1.3\,m$.

Esercizio 1.5 I due corpi rappresentati nella figura 2 hanno massa m_1 e m_2 rispettivamente e sono collegati da un filo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza l; il manicotto di massa m_1 può scorrere senza attrito lungo un'asta orizzontale, il corpo di massa m_2 è libero di pendolare. I due corpi vengono lasciati liberi di muoversi con velocità iniziali nulle in corrispondenza del valore α_0 dell'angolo che il filo forma con la verticale. Si calcoli:

a) l'ampiezza A del moto oscillatorio del manicotto;

b) i moduli $|\vec{v}_1|$ e $|\vec{v}_2|$ delle velocità che i corpi possiedono quando si trovano allineati lungo la verticale.

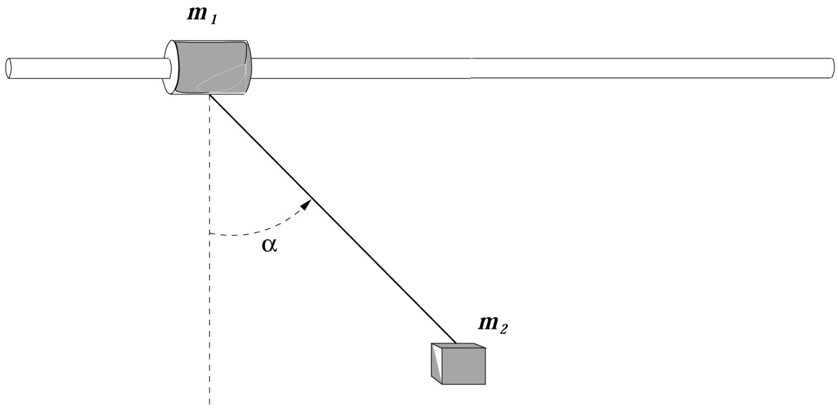

Figura 2: relativa all'esercizio **1.5**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 500\,g$; $m_2 = 600\,g$; $l = 70\,cm$; $\alpha_0 = 60°$.

Esercizio 1.6 Due anelli di uguali masse $m_1 = m_2 = m$ possono scorrere senza attrito lungo una sbarra orizzontale (vedi la figura 3). Gli anelli sono collegati da un filo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza complessiva $l = 120\,cm$, nel cui punto medio è appeso un corpo di massa $m_3 = 2m$; inizialmente gli anelli sono fermi a distanza relativa $d_{\rm rel} = \sqrt{3}/2\,l$. Gli anelli vengono lasciati liberi di muoversi lungo la sbarra. Si trovi un opportuno schema di ragionamento per immaginarsi il moto del sistema e in particolare del corpo appeso in prossimità della quota più bassa oppure (in alternativa) per imporre il vincolo della lunghezza del filo. Si calcoli il modulo $|\vec{v}|$ della velocità relativa degli anelli quando arrivano ad urtarsi.

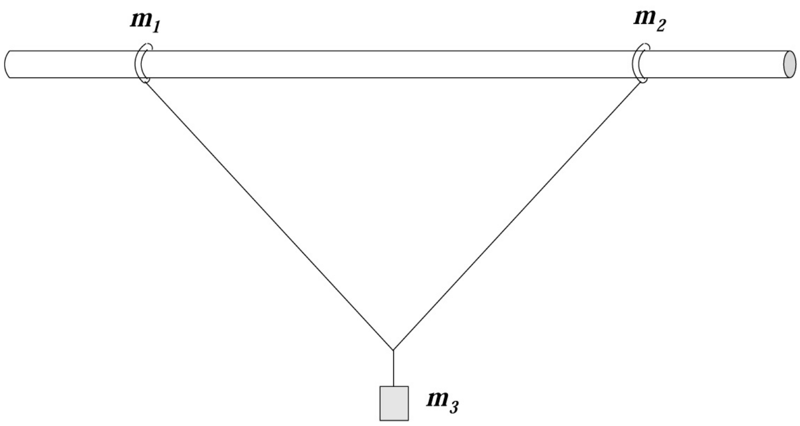

Figura 3: relativa all'esercizio **1.6**.

IMPORTANTE

Si possono utilmente rifare, a questo punto, gli esercizi 1.16 e 3.18 dell'Unità B, ragionando sulla conservazione della Quantità di moto totale ed utilizzando i nuovi concetti introdotti, per rispondere alle domande di quegli esercizi.

1.2 Problema a due corpi, conservazioni e interazione di breve durata

Esercizio 1.7 Due carrelli A e B, di masse m_A e m_B, collegati da una molla di costante elastica k, possono muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Sopra il carrello A si trova una persona di massa m (vedi la figura 4). Il sistema è in quiete e la molla ha lunghezza uguale a quella di riposo l_0. All'istante $t = 0$ la persona salta giù dal carrello A, dalla parte opposta rispetto a B, e la sua velocità $\vec{u}$ relativa ad A è parallela al piano di terra. Si determinino:

a) le componenti rispetto all'asse x sul suolo delle velocità $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ e $\vec{v}$ dei carrelli e della persona subito dopo il salto;

b) la compressione massima $\delta_{\max}$ subita dalla molla;

c) la legge oraria dei moti dei due carrelli.

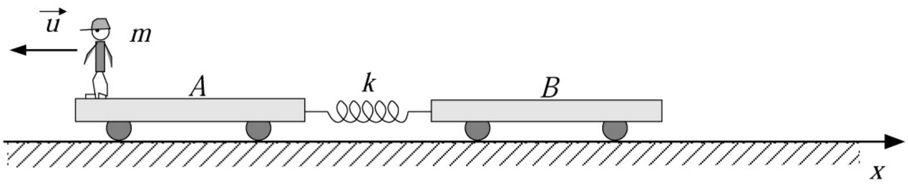

Figura 4: relativa all'esercizio **1.7**.

Esercizio 1.8 Nel sistema di figura 5, il blocco di massa M, la cui superficie superiore è un piano inclinato di altezza h e inclinazione α, si trova su un piano orizzontale lungo il quale può scorrere. Un blocchetto di massa $m = \gamma\, M$ è appoggiato all'estremità di una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo $l_0 = AB/2$, che è fissata all'estremità del piano inclinato. Inizialmente il sistema è in quiete e la molla è compressa di un tratto $\delta_0 = l_0/2$. Si eliminano i vincoli che tengono compressa la molla e si lascia il sistema libero di muoversi. Il blocchetto arriva al suolo nel punto di ascissa x^*. Trascurando tutti i possibili attriti, si calcoli:

a) l'ascissa $\bar{x}$ del blocchetto quando esso passa per il vertice A e, corrispondentemente, la sua velocità $\vec{v}$ e la velocità $\vec{V}$ del piano inclinato, rispetto a terra;

b) la costante elastica k della molla.

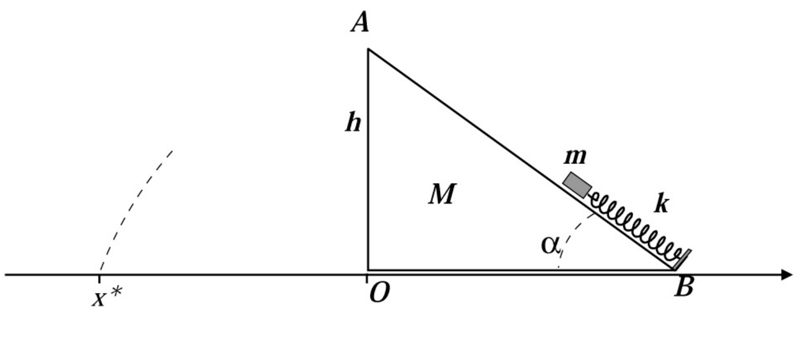

Figura 5: relativa all'esercizio **1.8**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 2.0\, kg$; $h = 44.0\, cm$; $\alpha = 36°$; $\gamma = 0.1$; $x^* = -107\, cm$.

Esercizio 1.9 Due corpi celesti di masse m_1 ed m_2 ruotano intorno al centro di massa del sistema. In questo sistema di riferimento (inerziale), il primo compie un'orbita circolare di raggio R_1. Determinare:

a) la traiettoria del secondo corpo;

b) la distanza d tra i due corpi;

c) la velocità angolare di ciascun corpo.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 8.0 \cdot 10^{31} kg$; $m_2 = 4.0 \cdot 10^{31} kg$; $R_1 = 6.7 \cdot 10^6 m$.

Esercizio 1.10 Un blocchetto di massa m poggia sulla sommità del piano inclinato (di un angolo α rispetto all'orizzontale) di un blocco a forma di cuneo, di massa M, che può scorrere su un piano orizzontale (vedi la figura 6). Il lato inclinato del blocco ha lunghezza L, il lato verticale è a contatto con un gradino, come mostrato in figura. All'estremità inferiore del piano inclinato è fissata una molla di costante elastica k, lunghezza a riposo l_0 e con l'asse lungo la direzione di massima pendenza del piano inclinato. Si lascia libero il blocchetto di scendere lungo il piano inclinato e questo va a comprimere la molla. L'attrito sulla superficie del piano inclinato è trascurabile . Si determini:

a) il valore minimo $\mu_{s_{\{\min\}}}$ del coefficiente di attrito statico, tra il cuneo e il piano orizzontale, necessario affinché esso rimanga fermo, durante l'intero moto del blocchetto.

b) Si determini, nell'ipotesi che questo attrito (tra il cuneo e il piano orizzontale) sia trascurabile, l'impulso $|\vec{I}|$ trasmesso dal cuneo al gradino fino al momento del suo distacco dal gradino e la corrispondente compressione δ_1 della molla ;

c) ed inoltre, dopo che il cuneo si è distaccato dal gradino, la compressione massima $\delta_{\max}$ della molla e la quota massima $h_{\max}$ alla quale giunge successivamente il blocchetto.

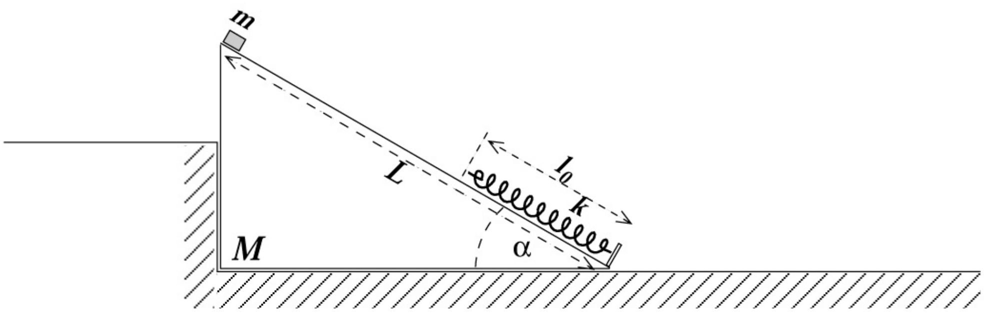

Figura 6: relativa all'esercizio **1.10**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 3.0\,kg$; $\alpha = 30°$; $M = 10\,kg$; $L = 100\,cm$; $k = 3000\,N/m$; $l_0 = 20\,cm$.

Esercizio 1.11 Un carrello di massa m si trova sopra un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale; sul carrello c'è una persona di massa m_1. Opportuni ceppi impediscono al carrello di scivolare verso il basso senza impedire un suo eventuale moto verso l'alto. La persona salta giù dal carrello in un tempo praticamente nullo e subito dopo il salto la sua velocità $\vec{v}$ è orizzontale: la persona tocca nuovamente il piano inclinato in un punto situato più in basso rispetto alla posizione iniziale di un tratto h. Si calcoli il modulo $|\vec{V}|$ della velocità del carrello subito dopo il salto.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 200\,kg$; $\alpha = \pi/6\,rad$; $m_1 = 50\,kg$; $h = 3.2\,m$.

Esercizio 1.12 Un carrello di massa M è fermo sopra due binari orizzontali e rettilinei che presentano attrito trascurabile. Sopra il carrello si trovano tre persone, ognuna di massa m. Si considerino i due casi seguenti:

1) le tre persone saltano a terra dalla stessa parte rispetto al carrello, una dopo l'altra, ognuna con velocità relativa al carrello parallela ai binari e di modulo $|\vec{u}|$;

2) le tre persone saltano a terra contemporaneamente con uguale velocità ed uguale al caso precedente.

Si calcoli il modulo $|\vec{V}|$ della velocità finale del carrello nei due casi.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 200\,kg$; $m = 50\,kg$; $|\vec{u}| = 6\,m/s$.

Esercizio 1.13 Un blocco di massa M è a riposo su di un piano orizzontale senza attrito ed è appoggiato ad una molla ideale di costante elastica k, fissata all'altro estremo ad una parete. Sul blocco M è poggiato un blocchetto di massa m (vedi la figura 7). Il coefficiente di attrito dinamico fra m ed M è μ_d. Un proiettile di massa m_p e velocità $\vec{v}_0$ urta il blocchetto m e vi rimane conficcato.

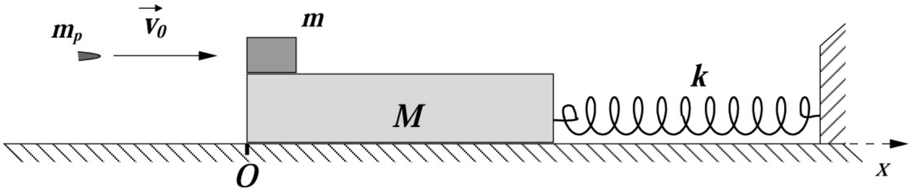

Figura 7: relativa all'esercizio **1.13**.

Calcolare gli spostamenti assoluti x_m e x_M del blocchetto e del blocco, nel riferimento in figura, all'istante t_1 dopo l'urto. Calcolare inoltre le rispettive velocità.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 10\,kg$; $k = 4\,N/m$; $m = 0.8\,kg$; $\mu_d = 0.3$; $m_p = 0.2\,kg$; $|\vec{v}_0| = 20\,m/s$; $t_1 = 0.5\,s$.

Esercizio 1.14 Due masse puntiformi m_1 e $m_2 = 2\,m_1$, in quiete su un asse orizzontale liscio, sono unite tra loro da una molla ideale di costante elastica k. Una terza massa puntiforme m_3, in moto con velocità $\vec{v}_0$ diretta secondo l'asse della molla, colpisce la massa m_1; l'urto è elastico. Si determini la velocità della massa m_3 dopo l'urto e la compressione massima $\delta_{\max}$ della molla.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 250\,g$; $m_3 = 150\,g$; $|\vec{v}_0| = 2.4\,m/s$; $k = 28\,N/m$.

Esercizio 1.15 Un rullo cilindrico di massa m, che può essere considerato puntiforme, si trova in quiete rispetto alla superficie piana superiore di un carrello A e ad una certa distanza dalla base di un piano inclinato fissato sopra il carrello; questo è in movimento su un piano orizzontale con velocità costante $\vec{V}_0$ (vedi la figura 8); la massa complessiva del carrello e del piano inclinato, escluso il rullo, è m_A.

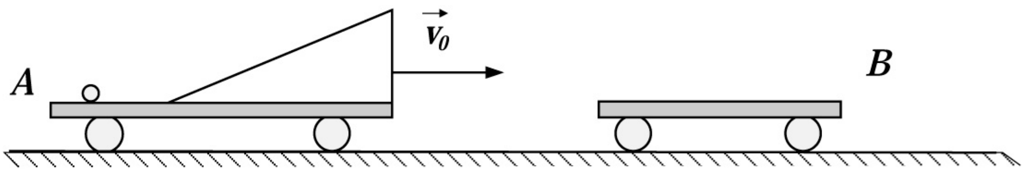

Figura 8: relativa all'esercizio **1.15**.

Il carrello va ad urtare contro un secondo carrello B, fermo sopra la superficie orizzontale, di massa m_B: i due carrelli dopo l'urto restano uniti, mentre il rullo, che al momento dell'urto è libero di muoversi, sale lungo il piano inclinato fino all'altezza massima h (rispetto alla posizione di partenza); l'energia persa dal rullo per attrito è trascurabile. Si calcoli h.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 100\,kg$; $|\vec{V}_0| = 4.4\,m/s$; $m_A = 500\,kg$; $m_B = 500\,kg$.

Esercizio 1.16 Nel problema precedente si consideri che i due carrelli dopo l'urto non restano uniti e l'altezza massima sia:

$$h = \frac{m_A\,|\vec{V}_0|^2}{2(m+m_a)g} \quad .$$

Si calcoli il modulo $|\vec{V}_B|$ della velocità che possiede il carrello B dopo l'urto e l'eventuale perdita di energia.

Esercizio 1.17 Due piani inclinati contrapposti sono rigidamente connessi tra loro in modo da formare un dosso di altezza h e massa M, come mostrato nella figura 9. Il dosso è appoggiato inizialmente fermo su di un piano orizzontale. Una pallina di massa m assimilabile ad un punto materiale è lanciata lungo il piano con velocità $\vec{v}_0$. Tutti gli attriti sono trascurabili e la zona sommitale del dosso è opportunamente arrotondata in modo che la pallina non abbandoni mai il contatto. Si determini:

a) la velocità v_{0x} tale che la pallina arrivi esattamente nel punto più alto del dosso senza superarlo.

Assumendo ora una velocità iniziale della pallina $v'_{0x} = \gamma\ v_{0x}$, nei due casi $\gamma = 1.2$ (> 1) e $\gamma = 0.8$ (< 1), si determini:

b) le velocità del dosso e della pallina quando quest'ultima è ritornata sul piano orizzontale;

c) la massima velocità raggiunta dal dosso, durante lo scivolamento su di esso della pallina.

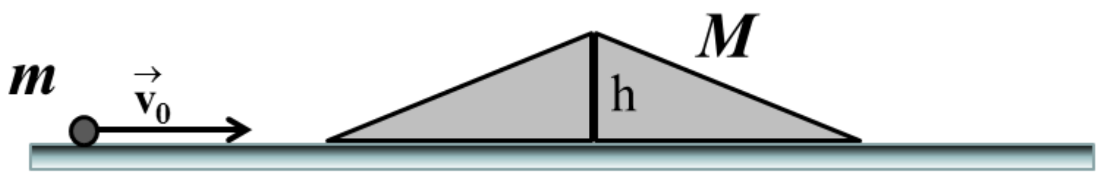

Figura 9: relativa all'esercizio **1.17**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 500\,g$; $m = 200\,g$; $h = 20\,cm$.

Esercizio 1.18 Un satellite di massa m_1 ruota su di un'orbita circolare di raggio noto R intorno alla terra. Durante il suo moto urta un corpo di massa m_2 nell'istante in cui quest'ultimo, lanciato dalla terra, si trova in quiete rispetto ad essa. Si calcoli la distanza minima dal centro della terra raggiunta dalle due masse che, dopo la loro collisione, costituiscono un solo satellite.
APPLICAZIONE NUMERICA: $m_1 = 500\,kg$; $m_2 = 100\,kg$; $R = 5 \cdot 10^7 m$.

2 Dinamica dei corpi rigidi

2.1 Equazioni cardinali e principi di conservazione

Esercizio 2.1 Due corpi puntiformi di masse $m_1 = m$ e $m_2 = m/2$ sono collegati da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza l; sopra il sistema non agiscono forze esterne e all'istante $t = 0$ la situazione è quella riprodotta in figura 10 con $|\vec{v}_1| = 2\,|\vec{v}_2|$.

Si determinino le posizioni dei due corpi all'istante t_1 tale che $3\,|\vec{v}_1|\,t_1/(2l) = \pi$.

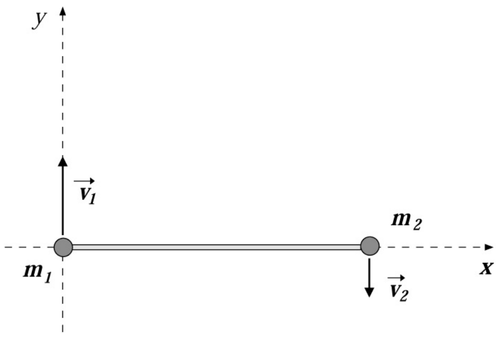

Figura 10: relativa all'esercizio **2.1**.

Esercizio 2.2 Due piccole sfere di masse $m_1 = m$ e $m_2 = 2\,m$ sono fissate alle estremità di un'asta di lunghezza l e massa trascurabile; l'asta è incernierata, in un punto distante $l/3$ dalla sferetta di massa m_1, ad un asse orizzontale attorno al quale può ruotare con attrito trascurabile.

L'asta, lasciata libera con velocità nulla nella posizione orizzontale, sotto l'azione della forza peso ruota attorno all'asse di sospensione. Si calcolino i moduli $|\vec{v}_1|$ e $|\vec{v}_2|$ delle velocità delle sfere all'istante in cui l'asta passa per la posizione verticale.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 80\,cm$.

Esercizio 2.3 Il sistema riprodotto nella figura 11 viene lasciato libero di muoversi sotto l'azione della forza peso: inizialmente il corpo A di massa m_A è al suolo, il corpo B di massa m_B è ad altezza h rispetto al suolo.

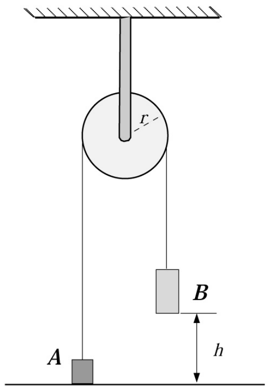

Figura 11: relativa all'esercizio **2.3**.

L'energia dissipata per attrito tra il filo (ideale) e la carrucola è trascurabile. Si calcoli il modulo $|\vec{V}|$ della velocità con cui il corpo B giunge al suolo e i moduli delle tensioni nel filo nei due casi:

a) se il momento d'inerzia I della carrucola rispetto all'asse di rotazione è trascurabile;

b) se la carrucola ha massa M e raggio r (ed è assimilabile ad una ruota).

APPLICAZIONE NUMERICA: $m_A = 2.0\,kg$; $m_B = 4.0\,kg$; $M = 3.00\,kg$; $h = 3\,m$.

Esercizio 2.4 Un filo inestensibile, di massa trascurabile, è avvolto attorno ad un rocchetto cilindrico di raggio r e bloccato alla sua estremità in modo che non scivoli sulla superficie laterale del rocchetto (vedi la figura 12).

Si tiene ferma l'estremità libera del filo e si lascia il rocchetto libero di cadere sotto l'azione della forza peso. Si determini l'accelerazione $\vec{a}_C$ dell'asse del rocchetto. Si ragioni anche sulla scomposizione dell'energia cinetica totale.

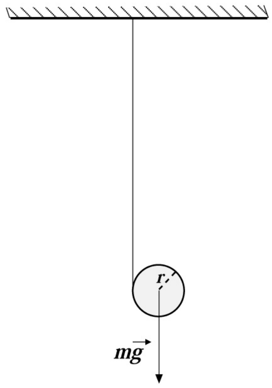

Figura 12: relativa all'esercizio **2.4**.

Esercizio 2.5 Il *trabucco* è un'arma da assedio medievale, che si può schematizzare (vedi figura 13) come una lunga leva, incernierata in un tratto O (un punto nella figura, il fulcro) ad un asse orizzontale posto ad un'altezza h dal suolo. All'estremità corta della leva, di lunghezza R, è posto un carico di massa M piuttosto grande. All'estremità lunga della leva, di lunghezza r, è posto un cucchiaio, entro cui si pone il proiettile di massa m.

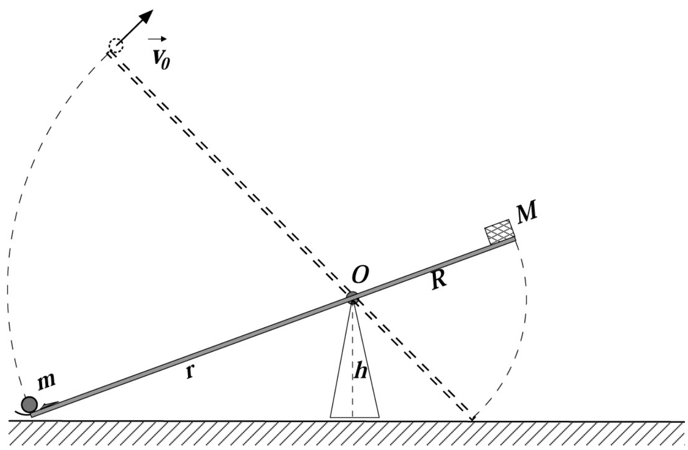

Figura 13: relativa all'esercizio **2.5**.

Inizialmente la leva è disposta in modo che il cucchiaio stia sul terreno, e la leva è bloccata con la massa M in alto. La leva viene poi liberata, l'estremità con il carico M cade a terra, e quando la leva viene bloccata dal terreno essa lancia il proiettile. Si trascuri la massa della leva, la resistenza dell'aria e l'attrito sull'asse della cerniera. Calcolare:

a) la velocità $|\vec{v}_0|$ con cui il proiettile lascia il cucchiaio;

b) la gittata L del trabucco, intesa come la distanza tra il piede della verticale che passa per il fulcro e il punto di caduta del proiettile.

c) Quanto varrebbe la gittata se il trabucco fosse trasportato sulla Luna (dove l'accelerazione di gravità vale $g_{\text{luna}} = 1.6\, m\, s^{-2}$)? Spiegare.

APPLICAZIONE NUMERICA: $h = 2.5\, m$; $R = 3.5\, m$; $r = 5.0\, m$; $M = 1200\, kg$; $m = 5.0\, kg$.

Esercizio 2.6 Un cilindro omogeneo di massa m e raggio r può ruotare liberamente intorno ad un asse orizzontale che è fissato all'interno di una scatola mobile di massa m_1 (vedi la figura 14). Sul cilindro è avvolto e fissato un filo ideale, che è collegato, tramite una carrucola ideale, ad un corpo di massa m_2, sospeso e libero di muoversi sulla verticale. Determinare:

a) nel caso in cui ci sia attrito tra la scatola e il piano orizzontale, il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché la scatola m_1 rimanga ferma;

b) nel caso in cui, invece, sia trascurabile l'attrito tra la scatola e il piano, la tensione del filo durante il moto,

c) e l'accelerazione angolare del cilindro.

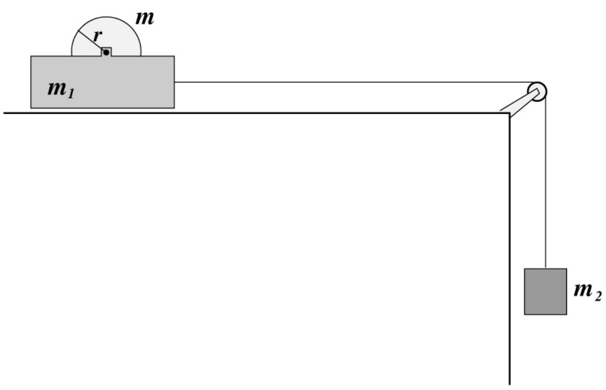

Figura 14: relativa all'esercizio **2.6**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 0.1\, m$; $m = 0.8\, kg$; $m_1 = 3.2\, Kg$; $m_2 = 1.1\, Kg$.

Esercizio 2.7 Un'asse di legno omogenea, di massa m e lunghezza l, poggia su due rulli cilindrici in rotazione, con assi di rotazione orizzontali paralleli e distanti $2d$ l'uno dall'altro, come mostrato in figura 15. Il centro di massa C dell'asse di legno si trova inizialmente fermo nella posizione di ascissa x_0, nel sistema di assi cartesiani mostrato in figura, quando l'asse viene appoggiata sui due rulli: essi ruotano con velocità angolari opposte di modulo ω_0 che vengono mantenute costanti. A causa del contatto con i rulli in moto, l'asse comincia a muoversi orizzontalmente avanti e indietro lungo l'asse x. Il coefficiente di attrito dinamico tra i rulli e l'asse di legno è μ_d.

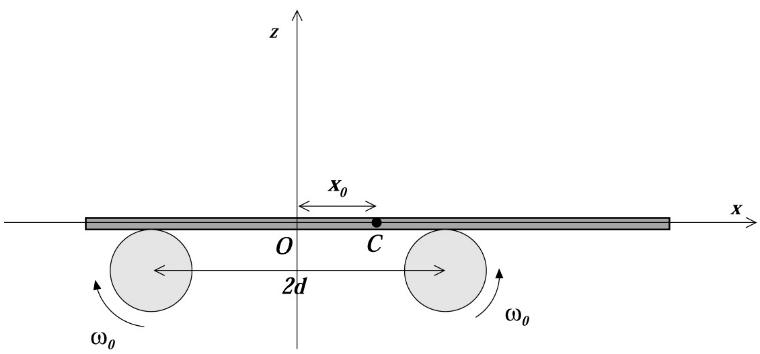

Figura 15: relativa all'esercizio **2.7**.

a) Determinare le componenti x e z di tutte le forze agenti sull'asse quando il suo centro di massa si trova nel punto di ascissa x_0;

b) dimostrare che il moto dell'asta è indipendente dal valore della velocità angolare dei rulli e determinarne la legge oraria e il periodo;

c) discutere le eventuali limitazioni sui valori di l e di ω_0 e determinare gli intervalli di variabilità dei valori delle reazioni normali (da parte dei rulli sull'asse) nel corso del tempo.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 3.00\,kg$; $d = 120\,cm$; $\mu_d = 0.2$; $x_0 = 30.0\,cm$.

Esercizio 2.8 Un corpo rigido, omogeneo, di massa m e di sezione circolare di raggio r, è appoggiato con attrito su una guida rettilinea inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale e viene abbandonato in quiete in una certa posizione iniziale. I coefficienti di attrito sono μ_s e μ_d. Determinare la relazione tra angolo α e coefficiente di attrito statico che discrimina tra moto di rotolamento e moto rototraslatorio con scivolamento e, nelle due situazioni, studiare il moto del corpo nei tre casi in cui il corpo abbia le seguenti forme: 1) sfera; 2) ruota (giacente nel piano verticale contenente la guida); 3) anello di sezione trascurabile (giacente nel piano verticale contenente la guida). In particolare determinare:

a) il tempo impiegato dal centro di massa C per percorrere una certa distanza l lungo la guida,

b) nonché le velocità e le energie cinetiche nella posizione finale, discutendone conservazione e dissipazione (nel caso in cui il moto non è di rotolamento).

NOTA BENE: i risultati possono essere espressi in funzione di un fattore di forma b adimensionale che caratterizza, con valori numerici diversi, il momento d'inerzia intorno all'asse di rotazione nei tre casi richiesti: $I_c = bmr^2$.

Esercizio 2.9 Si consideri un corpo rigido come quello descritto nell'Esercizio 2.8. Esso è in moto traslatorio con velocità $\vec{v}_0$ sulla superficie perfettamente liscia di un piano orizzontale. Ad un certo punto inizia un tratto scabro e sia μ_d il coefficiente di attrito dinamico: il corpo comincia a ruotare con velocità angolare crescente (in modulo), mentre la velocità del centro di massa andrà diminuendo. Studiare il moto nei tre casi detti (in funzione del parametro b):

a) calcolare il tempo t^* e lo spazio percorso x_C^* prima che si instauri un moto di rotolamento. Qual è il moto e con quale velocità nel tempo successivo e quale è il valore della forza di attrito statico?

b) Calcolare l'energia dissipata, a causa dell'attrito, fino al tempo t^*.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 0.8\,kg$; $|\vec{v}_0| = 2.6\,m/s$; $\mu_d = 0.1$.

Esercizio 2.10 Un'asse di legno omogenea di lunghezza l e massa M è poggiata su due rulli identici di massa m e raggio r. I centri dei rulli sono posti ad una distanza L l'uno dall'altro e l'asse è centrata rispetto ai due rulli. Inizialmente il sistema formato dall'asse e dai rulli è fermo su di un piano inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale (vedi la figura 16 alla pagina successiva). Determinare:

a) il modulo $|\vec{A}|$ dell'accelerazione che acquista l'asse quando il sistema è lasciato libero di muoversi, assumendo che i rulli rotolino senza strisciare né rispetto al piano inclinato né rispetto all'asse di legno (provare a risolvere sia mediante le equazioni del moto per i singoli corpi, sia derivando rispetto al tempo l'equazione della conservazione dell'energia);

b) il tempo t_1 che impiega l'asse per cadere dalla sommità del rullo più in alto.

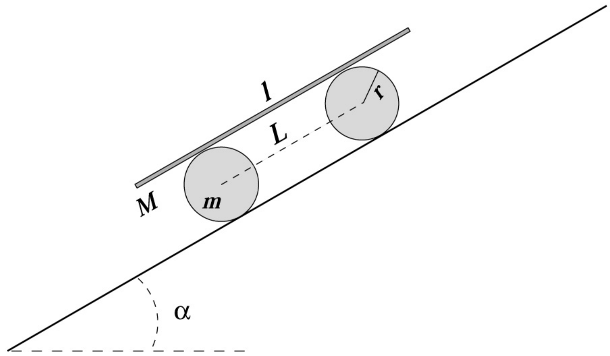

Figura 16: relativa all'esercizio **2.10**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 3\,m$; $M = 3.5\,kg$; $m = 2.1\,kg$; $L = 1.6\,m$; $r = 10\,cm$; $\alpha = 30°$.

Esercizio 2.11

Studio del moto di una sfera che sale su un piano inclinato.

Una sfera omogenea di massa m e raggio r sale con moto puramente traslatorio su un tratto perfettamente levigato di un piano inclinato, con angolo d'inclinazione α_1. Ad un certo punto, quando la sua velocità è $\vec{v}_0$, la superficie del piano diventa scabra e i coefficienti di attrito dinamico sono $\mu_s = \mu_d = \mu$.

Studiare il moto. Si instaura ad un certo punto un moto di rotolamento? E dopo quanto tempo? E con quale velocità del Centro di Massa?

Trovare l'espressione della forza di attrito statico e discuterne la compatibilità. Dopo quanto tempo la sfera si fermerà?

Studiare il moto anche nel caso in cui l'angolo d'inclinazione è α_2, ripetendo gli stessi passaggi precedenti.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 800\,g$; $r = 4\,cm$; $\alpha_1 = 35°$; $|\vec{v}_0| = 5\,m/s$; $\mu = 0.25$; $\alpha_2 = 42°$.

Esercizio 2.12 Una sfera di massa m e raggio r viene lanciata su un piano orizzontale con una velocità iniziale del centro di massa $\vec{v}_0$. Nel lanciarla si fa in modo che la sfera ruoti all'indietro con una velocità angolare iniziale ω_0 (ad esempio con velocità del centro di massa verso destra e velocità angolare antioraria). Supponendo che il piano su cui la sfera viene lanciata presenti un coefficiente di attrito dinamico μ_d, determinare:

a) il valore di ω_0 affinché la sfera si fermi e, in questo caso, l'istante in cui si ferma e lo spazio percorso;

b) il valore di ω_0 affinché la sfera torni indietro e cominci a rotolare esattamente nel punto di partenza.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 6\,cm$; $v_0 = 0.45\,m/s$; $\mu_d = 0.1$.

Esercizio 2.13 Un cilindro, di massa m e raggio R, viene appoggiato, con velocità nulla del centro di massa, all'apice di un piano inclinato. Nell'appoggiarlo si fa in modo che il cilindro ruoti intorno al proprio asse con velocità angolare antioraria ω_0 (vedi la figura 17). Il piano, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, è lungo complessivamente L e nella metà superiore è perfettamente liscio mentre la sua metà inferiore è caratterizzata da attrito con $\mu_s = \mu_d = \mu$.

a) Si determini la velocità del centro di massa del cilindro nell'istante t_0 in cui il punto di contatto raggiunge il tratto scabro del piano. Si discuta, innanzi tutto, quale ipotesi deve verificarsi affinché il centro di massa del cilindro possa fermarsi (istantaneamente) lungo il tratto scabro; si calcoli allora, in questa ipotesi, il valore, μ^*, del coefficiente di attrito affinché il centro di massa giunga con velocità nulla esattamente alla fine del piano inclinato. E quale deve essere, con $\mu = \mu^*$, il valore minimo di ω_0 affinché questo possa effettivamente accadere?

b) Sia ora $\omega_0^\dagger$ il valore della velocità angolare iniziale e sia $\mu = \mu^*$. Si stabilisca in quale istante, a partire da t_0, e in quale punto del piano inclinato si instaura il moto di rotolamento (verificando che esso sia possibile).

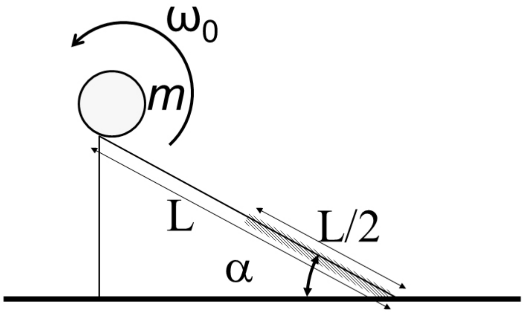

Figura 17: relativa all'esercizio **2.13**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $R = 40\,cm$; $\alpha = 10°$; $L = 280\,cm$; $\omega_0^\dagger = 35\,rad/s$.

Esercizio 2.14 Un carrellino, di massa M e lunghezza del piano superiore L, poggia in quiete su un piano orizzontale. Esso si può muovere senza attrito sul piano. All'istante iniziale un cilindro omogeneo, di raggio r e massa m, in rotazione intorno al suo asse alla velocità ω_0, viene appoggiato (con velocità del centro di massa nulla) sul bordo del piano superiore del carrello. Tra la superficie di questo piano e il cilindro c'è attrito con un coefficiente di attrito dinamico μ_d; determinare:

a) la minima lunghezza, $L_{\min}$, del piano del carrello affinché il moto del cilindro (rispetto al carrello) dopo lo slittamento iniziale diventi di rotolamento;

b) le velocità finali del carrello e del cilindro e l'energia dissipata per l'attrito.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 8\,kg$; $r = 16\,cm$; $m = 3.2\,kg$; $|\omega_0| = 400\,giri/min$; $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 2.15 Una piattaforma circolare, di raggio R e massa M, è libera di ruotare su di un piano orizzontale, attorno all'asse passante per il centro. Lungo un suo raggio è praticata una scanalatura, all'interno della quale può muoversi un blocchetto puntiforme di massa m. Tutti gli attriti sono trascurabili. All'istante iniziale la piattaforma ruota con velocità angolare ω_0 e il blocchetto si trova a distanza R dal centro ed ha una velocità relativa $\vec{v}_0$ diretta verso il centro (vedi figura 18).

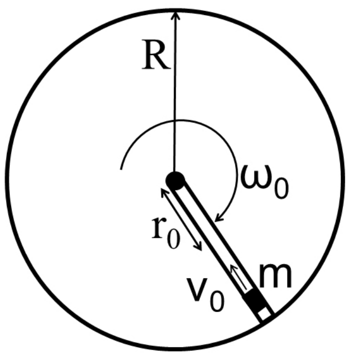

Figura 18: relativa all'esercizio **2.15**.

Determinare:

a) il momento angolare totale del sistema all'istante iniziale;

b) la velocità angolare finale della piattaforma quando il blocchetto è giunto ad una distanza r_0 dal centro della piattaforma;

c) il modulo della velocità iniziale v_0 tale che il blocchetto giunga in r_0 con velocità nulla.

APPLICAZIONE NUMERICA: $R = 60\,cm$; $M = 2.5\,kg$; $m = 250\,g$; $\omega_0 = -1.5\,rad/s$; $r_0 = 12\,cm$.

Esercizio 2.16 Un disco omogeneo, di raggio r e massa M, può ruotare senza attrito intorno a un asse verticale passante per il suo centro. Su di esso si muove, lungo una circonferenza, un blocchetto praticamente puntiforme di massa m: esso è legato ad un filo ideale di lunghezza l, fissato all'altro estremo al perno centrale intorno a cui ruota il disco. Tra il blocchetto e la superficie del disco c'è attrito e il coefficiente di attrito dinamico è μ_d. All'istante iniziale il disco è fermo e il blocchetto ha una velocità (perpendicolare al filo) $\vec{v}_0$. Determinare:

a) la velocità angolare posseduta dal disco quando il blocchetto si arresta su di esso;

b) il tempo impiegato dal blocchetto a fermarsi e il cammino percorso sul disco fino all'arresto.

Risolvere sia nel sistema fisso che nel sistema solidale con il disco, al fine di comprendere il ruolo delle diverse forze apparenti. Inoltre, risolvere con le equazioni del moto ma anche con i principi e teoremi generali.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 30\,cm$; $M = 2\,kg$; $m = 600\,g$; $l = 20\,cm$; $\mu_d = 0.05$; $|\vec{v}_0| = 12\,m/s$.

Esercizio 2.17 Un sistema rigido è costituito da una sbarretta omogenea di massa m e lunghezza R attaccata lungo un raggio sulla superficie di un disco omogeneo di massa M e raggio R (vedi la figura 19). Il disco è libero di ruotare, senza attrito, intorno ad un asse fisso orizzontale passante per il centro del disco e perpendicolare ad esso.

a) Nell'ipotesi di piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, calcolare il periodo di oscillazione del sistema.

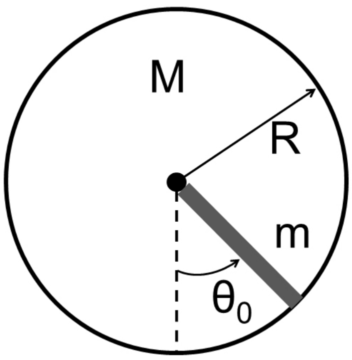

Figura 19: relativa all'esercizio **2.17**.

Se il disco viene rilasciato, da fermo, quando la sbarretta forma un angolo θ_0 con la verticale, si determini:

b) la velocità angolare del disco quando l'asta transita per la verticale;

c) il valore massimo e minimo del modulo della reazione dell'asse di rotazione.

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 500\,g$; $R = 60\,cm$; $m = 250\,g$; $\theta_0 = 30°$.

Esercizio 2.18 Un tuffatore di massa m, alto $l = 1.80\,m$, sta in piedi sul bordo di un trampolino (equilibrio instabile) quando si lascia cadere con le braccia lungo i fianchi rimanendo rigido (vedi la figura 20).

a) Si faccia, dapprima, l'ipotesi semplificatrice che egli sia in grado di tenersi aggrappato con i piedi (pur sempre discendente dalla scimmia!) all'estremità del trampolino, in modo da compiere una rotazione di $\frac{\pi}{2}\, rad$, rispetto all'asse orizzontale passante per il bordo del trampolino, prima di abbandonare la presa e cadere verso il basso.

b) Se invece si considera che il tuffatore sia solo appoggiato all'estremità del trampolino, il problema si complica un po' perché bisogna trovare l'angolo, θ^*, in cui egli si distacca dal trampolino. Una possibile modellizzazione, piuttosto semplice (ma non è l'unica), del contatto è quella di considerare la proiezione radiale della reazione vincolare e imporre che questa si annulli al distacco (piante dei piedi che ruotano intorno al bordo arrotondato del trampolino).

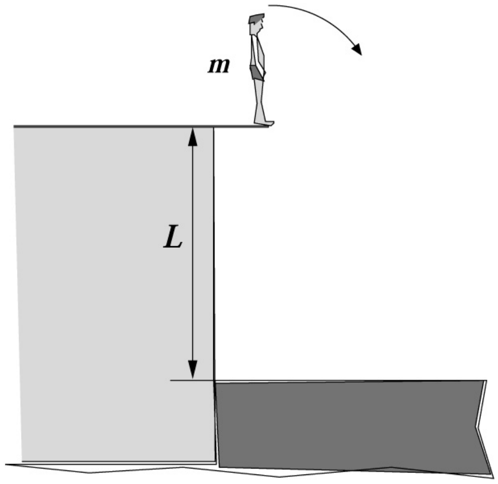

Figura 20: relativa all'esercizio **2.18**.

In entrambi i casi, si calcoli l'altezza del trampolino sull'acqua, L, affinché il tuffatore entri nell'acqua di testa e con il corpo perfettamente verticale (si assuma che l'uomo in posizione rigida possa essere considerato come un corpo omogeneo avente il centro di massa a metà altezza e momento di inerzia, rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo centro di massa, di valore $I = \frac{m\,l^2}{12}$).

Esercizio 2.19 Un cilindro omogeneo di massa m e raggio r può rotolare (il coefficiente di attrito statico è tale da garantire il rotolamento nelle condizioni qui esaminate) lungo una guida di raggio R (vedi la figura 21).

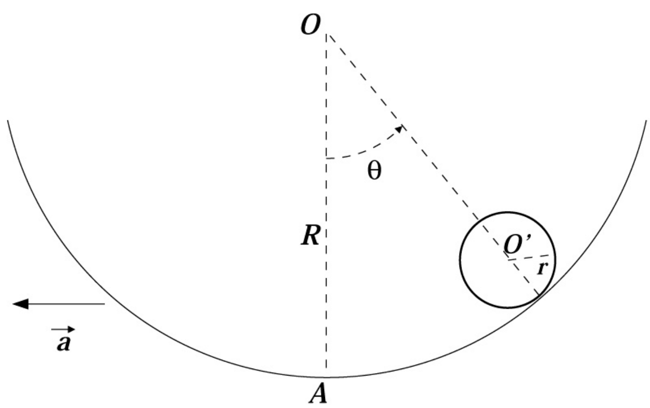

Figura 21: relativa all'esercizio **2.19**.

a) Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile (facendo attenzione all'espressione della condizione di rotolamento).

b) Calcolare il valore del modulo dell'accelerazione $\vec{a}$ (vedi figura) che deve avere la guida affinché il cilindro, posto inizialmente a riposo con $\theta = \theta_0$, ci rimanga. Calcolare, inoltre, il periodo delle piccole oscillazioni attorno a questa nuova posizione di equilibrio stabile.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 18\,cm$; $R = 84\,cm$; $\theta_0 = 30°$.

Esercizio 2.20 Tre sfere A, B e C hanno lo stesso raggio e sono identiche esteriormente. La sfera A è però più leggera delle altre, B e C hanno uguale massa ma B contiene al centro una cavità sferica. Si dica quale sfera può essere identificata se:

a) si dispone di una bilancia;

b) si lasciano cadere le sfere nell'acqua e si osserva il loro movimento;

c) si lanciano le sfere con la stessa velocità su un piano orizzontale liscio;

d) si lanciano le sfere con la stessa velocità su un piano orizzontale scabro;

e) si lasciano cadere le sfere lungo un piano inclinato liscio;

f) si lasciano cadere le sfere lungo un piano inclinato scabro;

g) si fanno urtare centralmente le sfere.

Esercizio 2.21 Un'asta omogenea di lunghezza l e massa m poggia con un estremo su di un piano orizzontale liscio e con l'altro ad una parete verticale liscia. Inizialmente l'asta è ferma e forma un angolo θ_0 con la verticale (in generale, θ è variabile tra il valore 0, asta verticale, e il valore $\pi/2$, asta orizzontale poggiata sul piano). L'asta viene lasciata libera di scivolare: determinare la velocità (vettoriale) del centro di massa, $\vec{v}_C$, allorché l'asta tocca terra. Come nel caso dell'esercizio precedente, l'asta si stacca dal muro in corrispondenza di un certo angolo θ^*: bisogna dunque trovare l'espressione di questo angolo e poi proseguire nell'analisi del moto fino a trovare l'espressione delle due componenti della velocità finale.

2.2 Interazioni di breve durata

Esercizio 2.22 Un'asta rigida, omogenea, di massa M e lunghezza L, è appoggiata senza attrito su un piano orizzontale ed è inizialmente in quiete. Una sferetta assimilabile ad un punto materiale P, di massa m, arriva perpendicolarmente all'asta con una velocità $\vec{v}_0$ e la urta in un suo punto A. L'urto è perfettamente anelastico (P rimane attaccato all'asta dopo l'urto).

Studiare il moto dopo l'urto per una generica distanza b fra A e il punto di mezzo B dell'asta. Trovare poi il particolare valore b_0 di b per cui il modulo della velocità angolare, dopo l'urto, risulta massimo; calcolare tale modulo massimo e l'energia meccanica persa nell'urto in questo caso.
APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 270\,g$; $L = 80\,cm$; $m = 180\,g$; $|\vec{v}_0| = 7.5\,m/s$.

Esercizio 2.23 Una pallina di massa $m/3$, che si muove su un piano orizzontale liscio con velocità $\vec{v}_0$, colpisce l'estremità inferiore di una sbarretta di lunghezza l. La sbarretta, disposta verticalmente e vincolata nell'estremità superiore ad una cerniera, è ferma prima dell'urto. L'urto è elastico e la sbarretta è libera di ruotare senza attriti nel piano verticale. Si considerino i due casi, in cui la massa m della sbarretta: **1)** si possa considerare praticamente concentrata tutta nell'estremità inferiore e **2)** sia invece distribuita uniformemente per tutta la lunghezza.

a) Trovare le espressioni della velocità della pallina e della velocità angolare della sbarretta immediatamente dopo l'urto.

b) Calcolare il valore di $|\vec{v}_0|$ affinché la sbarretta raggiunga la posizione orizzontale con velocità angolare nulla.

APPLICAZIONE NUMERICA: $l = 40\,cm$.

Esercizio 2.24 Una sbarra omogenea di massa M e lunghezza l è sospesa in un estremo O. Inizialmente essa è inclinata di un angolo θ_0 rispetto alla verticale passante per O, e da questa posizione viene lasciata cadere da ferma. Raggiunta la posizione verticale, colpisce con la sua estremità inferiore una massa puntiforme m appoggiata su un piano orizzontale. Nell'ipotesi che l'asta ruoti attorno ad O senza attriti e che l'urto con la massa m sia completamente anelastico, calcolare:

a) la velocità angolare ω_0 con cui la sbarra urta la massa m.

b) L'angolo massimo, θ_1, rispetto alla verticale, descritto dalla sbarra in seguito all'urto.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 0.2\,Kg$; $M = 1.5\,kg$; $\theta_0 = 60°$; $l = 1.2\,m$.

Esercizio 2.25 Un disco omogeneo, di opportuno spessore, di massa M e raggio R può ruotare senza attriti nel piano verticale xz attorno ad un asse orizzontale, ortogonale al piano, passante per il suo centro O nel quale è posta l'origine. Il disco è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m, in moto rettilineo lungo una retta orizzontale parallela all'asse x, situata alla quota $z = -d$, e con velocità $\vec{v}_0$, si conficca nel bordo del disco. Supponendo che l'asse del disco venga tenuto fermo da un supporto al momento dell'urto, calcolare:

a) la velocità angolare ω del disco immediatamente dopo l'urto;

b) la componente x dell'impulso $\vec{I}$ sviluppato dal supporto, durante l'urto, necessario per mantenere fermo l'asse;

c) la quota finale raggiunta dal proiettile nel successivo moto rotatorio del disco, quando questo si arresta (per poi cominciare ad oscillare).

APPLICAZIONE NUMERICA: $M = 11\,kg$; $R = 50\,cm$; $m = 1.6\,kg$; $d = 18\,cm$; $|\vec{v}_0| = 17\,m/s$.

Esercizio 2.26 Una sferetta rigida, praticamente puntiforme e di massa m, cade lungo la verticale e urta elasticamente una semisfera rigida liscia, di massa M, nel punto A tale che (vedi la figura 22) l'angolo della congiungente tra A e il centro O con la verticale sia α; il modulo della velocità posseduta dalla sferetta subito prima dell'urto è $|\vec{v}_0|$. La semisfera prima dell'urto è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito. Si calcolino le componenti v_x e v_z della velocità della sferetta subito dopo l'urto e la velocità V_x della semisfera.

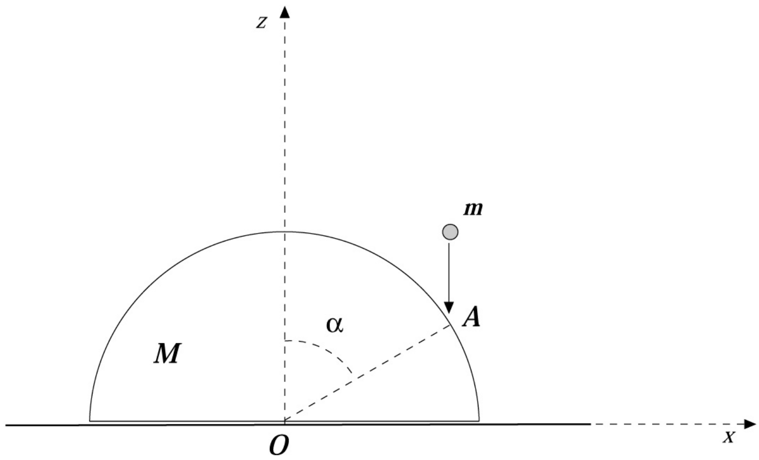

Figura 22: relativa all'esercizio **2.26**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 20\,g$; $M = 100\,g$; $\alpha = \pi/3$; $|\vec{v}_0| = 11\,m/s$.

Esercizio 2.27 Una sbarretta sottile e omogenea, di massa m e lunghezza l, si muove su un piano orizzontale liscio. Il suo moto è traslatorio e rettilineo e la velocità è $\vec{v}_0$, perpendicolare alla sbarretta. Essa va ad urtare una sbarretta identica in quiete sul piano. L'urto è completamente anelastico e la metà dell'una si attacca alla metà dell'altra (vedi la figura 23).

Determinare completamente il moto dopo l'urto del corpo composto dalle due sbarrette attaccate e calcolare l'energia cinetica finale e quella dissipata nell'urto.

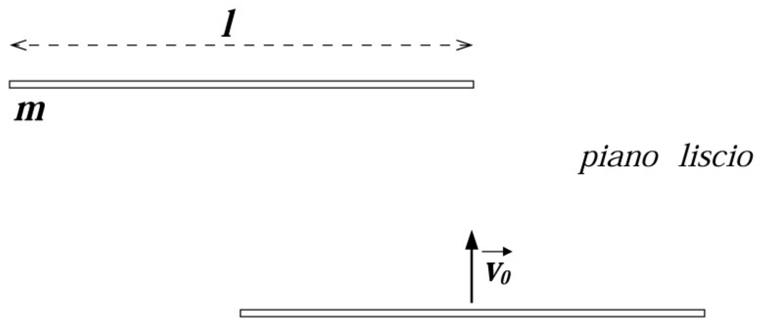

Figura 23: relativa all'esercizio **2.27**.

APPLICAZIONE NUMERICA: $m = 200\,g$; $l = 30\,cm$; $|\vec{v}_0| = 2.1\,m/s$.

Esercizio 2.28 Un cubo omogeneo, di spigolo $l = 20\,cm$, è poggiato con una faccia sopra un piano orizzontale e si muove rispetto a questo con velocità $\vec{V}$. Il cubo rimane incastrato con lo spigolo anteriore ad una sottile fenditura del piano intorno alla quale ruota senza attrito; si calcoli il valore $V_{\max}$ tale che se $|\vec{V}| > V_{\max}$ il cubo si ribalta in avanti.

Esercizio 2.29 Una sfera piena omogenea di raggio r è inizialmente in quiete sulla superficie liscia di un lago ghiacciato. Con un colpo impartito in modo che l'impulso trasferito sia orizzontale (dunque, in questo caso, deve esserci attrito tangenzialmente alle superfici), ad un'altezza $h < r$ al di sopra della superficie del lago, il centro della sfera acquista una velocità $\vec{v}_0$.

a) Si determini la velocità angolare della sfera immediatamente dopo il colpo ed il verso di rotazione.

b) Dopo aver percorso un certo spazio la sfera arriva su ghiaccio ruvido dove il coefficiente di attrito è μ_d. Si trovino la velocità del centro della sfera all'istante in cui la sfera comincia a rotolare e l'intervallo di tempo Δt per raggiungere tale stato di rotolamento.

APPLICAZIONE NUMERICA: $r = 15\,cm$; $h = 5\,cm$; $|\vec{v}_0| = 2.4\,m/s$; $\mu_d = 0.05$.

RISPOSTE "Unità C"

1.1 – discussione.

1.2 – $d = -1\,m$ $\quad d_{\text{rel}} = 7\,m$

1.3 – $|\vec{v}| = 123\,m/s$

1.4 – **a)** $v_{\text{rel}\,x} = 6.0\,m/s$ $\quad$ **b)** $\delta_2 = 45.5\,cm$

1.5 – **a)** $A = 33.1\,cm$ $\quad$ **b)** $|\vec{v}_1| = 2.12\,m/s$ $\quad |\vec{v}_2| = 1.77\,m/s$

1.6 – $|\vec{v}| = 4.85\,m/s$

1.7 – **a)** $v_{Ax} = -\dfrac{m}{m+m_A}\,u_x \qquad v_{Bx} = 0 \qquad v_x = \dfrac{m_A}{m+m_A}\,u_x$

b) $\delta_{\text{max}} = \dfrac{m}{m+m_A}\,|u_x|\,\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k\,(m_A+m_B)}}$

c) $x_A(t) = -\dfrac{m m_A u_x}{(m+m_A)(m_A+m_B)}\left(t + \dfrac{m_B}{m_A}\,\dfrac{1}{\Omega}\,\sin(\Omega\,t)\right)$

$x_B(t) = l_0 - \dfrac{m m_A u_x}{(m+m_A)(m_A+m_B)}\left(t - \dfrac{1}{\Omega}\,\sin(\Omega\,t)\right)$

$\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}\ ; \qquad \mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}$

1.8 – **a)** $\overline{x} = 4.13\,cm$ $\quad \alpha' = 38.6°$ $\quad V = 0.21\,m/s$ $\quad |\vec{v}| = 2.73\,m/s$

b) $k = 82.0\,N/m$

1.9 – **a)** orbita circolare di raggio: $R_2 = 2\,R_1$

b) $d = 20 \cdot 10^6 m$

c) $\omega_1 = \omega_2 = 0.99\,s^{-1}$

1.10 – **a)** $\mu_{s_{\{\min\}}} = 0.884$ $\quad$ **b)** $\left|\overrightarrow{I}\right| = 7.29\,N\ s$ $\quad \delta_1 = 0.49\,cm$

c) $\delta_{\text{max}} = 8.56\,cm$ $\quad h_{\text{max}} = 43.1\,cm$

1.11 – $\left|\overrightarrow{V}\right| = 1.48\,m/s$

1.12 – **1)** $\left|\overrightarrow{V}\right| = 3.06\,m/s$ $\quad$ **2)** $\left|\overrightarrow{V}\right| = 2.57\,m/s$

1.13 – $x_m(0.5\,s) = 1.6\,m$ $\quad x_M(0.5\,s) = 0.04\,m$

$v_m(0.5) = 2.5\,m/s$ $\quad v_M(0.5) = 0.14\,m/s$

1.14 – $v_3 = -0.6\,m/s$ $\quad \delta_{\text{max}} = 13.9\,cm$

1.15 – $h = 22.4\,cm$

1.16 – $\left|\overrightarrow{V}_B\right| = 4.4\,m/s$ $\quad$ Urto elastico

1.17 – **a)** $v_{0x} = 2.34\,m/s$ $\quad v_{f\,x} = 0.67\,m/s$ $\quad$ **b)** $\gamma = 1.2: \quad V = 0$

$v_x = \gamma\,v_{0x} = 2.81\,m/s$ $\quad \gamma = 0.8: \quad V = 1.07\,m/s \quad v_x = -0.803\,m/s$

c) $\gamma = 1.2: \quad V_{\text{max}} = 0.36\,m/s \quad v_x = 1.91\,m/s \quad \gamma = 0.8: \quad V_{\text{max}} = V_f = 1.07\,m/s$

1.18 – $d_{\text{min}} = 2.66 \cdot 10^7\,m$

2.1 – $\vec{r}_1(t_1) = \dfrac{2}{3}\,l\,\hat{\imath} + \dfrac{l}{3}\,\pi\,\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{r}_2(t_1) = -\dfrac{l}{3}\,\hat{\imath} + \dfrac{l}{3}\,\pi\,\hat{\jmath}$

2.2 – $|\vec{v}_1| = 1.32\,m/s$ $\quad |\vec{v}_2| = 2.64\,m/s$

2.3 – **a)** $\left|\overrightarrow{V}\right| = 4.4\,m/s$ $\quad |\vec{\tau}| = 26\ N$

b) $\left|\overrightarrow{V}\right| = 4.0\,m/s$ $\quad |\vec{\tau}_A| = 24.8\ N$ $\quad |\vec{\tau}_B| = 28.7\ N$

2.4 – $|\vec{a}_C| = \frac{2}{3}\,g$

2.5 – **a)** $|\vec{v}_0| = 12.9\,m/s$ **b)** $L = 18.4\,m$ **c)** La gittata rimane la stessa!

2.6 – **a)** $\mu_{s_{\min}} = 0.07$ **b)** $|\vec{\tau}| = 2.68\,N$ **c)** $\dot{\omega} = 67.0\,s^{-2}$

2.7 – **a)** $z: \quad p = -mg = -29.4\,N \qquad N_1 = mg\,\frac{d - x_0}{2d} = 11.0\,N \qquad N_2 = mg\,\frac{d + x_0}{2d} = 18.4\,N$

$x: \quad f_{a1} = \mu_d N_1 = 2.21\,N \qquad f_{a2} = -\mu_d N_2 = -3.68\,N$

b) Eq. del moto (indipendente da ω_0): $\ddot{x}_c + \frac{\mu_d g}{d} x_c = 0$

Legge oraria: $x_c(t) = x_0 \cos(\Omega\, t)\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu_d g}} = 4.91\,s$

c) N_1 e N_2 $\in [11.0\,N\,,\,18.4\,N]$

2.8 – $I_c = mr^2 b \qquad b:$ coefficiente di forma $\begin{cases} b = \frac{2}{5} & \text{sfera} \\ b = \frac{1}{2} & \text{disco o cilindro} \\ b = 1 & \text{anello} \end{cases}$

moto di rotolamento se: $\tan\alpha \le \mu_s \frac{1+b}{b}$

a) $t_1^{(\mathrm{rot})} = \sqrt{\frac{2(1+b)l}{g\sin\alpha}} \qquad t_1^{(\mathrm{rotras})} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}}$

b) $v_1^{(\mathrm{rot})} = \sqrt{\frac{2lg\sin\alpha}{1+b}} \qquad \omega_1^{(\mathrm{rot})} = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2lg\sin\alpha}{1+b}}$

$v_1^{(\mathrm{rotras})} = \sqrt{2lg(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)} \qquad \omega_1^{(\mathrm{rotras})} = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2lg\mu_d^2\cos^2\alpha}{b^2(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}}$

2.9 – **a)** $t^* = \frac{b}{1+b}\cdot 2.65\,s \qquad x_C^* = \frac{2b+b^2}{2(1+b)^2}\cdot 6.90\,m \qquad v_C = \frac{v_0}{1+b}$

b) $\mathcal{L}_{\mathrm{n.c.}} = -\frac{b}{1+b}\cdot 2.7\,J$

2.10 – **a)** $\left|\overrightarrow{A}\right| = 5.4\,m/s^2$ **b)** $t_1 = 0.72\,s$

2.11 – È possibile il rotolamento per: $\alpha = \alpha_1$, al tempo: $t_1 = 0.395\,s$;
con $v_C(t_1) = 1.984\,m/s \qquad \omega(t_1) = -49.6\,rad/s$ (piano inclinato a salire verso destra).
$f_{a.s.} = \frac{2}{7}\,mg\sin\alpha_1$ (verso l'alto). Si ferma a $t_2 = 0.889\,s$ e torna indietro rotolando.
NO rotolamento per: $\alpha = \alpha_2$, al tempo: $t_1 = 0.386\,s$; $v_C(t_1) = 1.760\,m/s$.
Moto rototraslatorio. Da questo istante, sempre, con forza di attrito dinamico verso l'alto!
Il CM si ferma a $t_2 = 0.758\,s$ con velocità angolare: $\omega(t_2) = -1.72\,rad/s$; e torna indietro.

2.12 – **a)** $\omega_0 = 18.8\,s^{-1} \qquad t_1 = 0.46\,s \qquad x_C(t_1) = 10.3\,cm$
b) $\omega_0 = 45\,s^{-1}$

2.13 – **a)** $v_0 = 2.18\,m/s \qquad \mu^* = 0.353 \qquad \omega_0^{\{\min\}} = 21.84\,rad/s$ CM si ferma a $t_1 = 1.28\,s$
b) Rotolamento a $t_2 = 1.90\,s$ risalendo verso l'alto, a distanza $d = 32.5\,cm$ dalla fine del piano
OK rotolamento, essendo $\tan\alpha < 3\,\mu^*$

2.14 – **a)** $L_{\min} = 1.39\,m$
b) $v_C^{(f)} = 1.97\,m/s \qquad \omega^{(f)} = -17.2\,s^{-1} \qquad V^{(f)} = -0.79\,m/s \qquad E_{\mathrm{diss}} = -21.1\,J.$

2.15 – **a)** $L_C(t=0) = -0.81\,kg\,m^2/s$ **b)** $\omega_{\mathrm{fin}} = -1.79\,rad/s$ **c)** $v_0 = 0.962\,m/s$

2.16 – **a)** $\omega^{(f)} = 12.6\, s^{-1}$ **b)** $t_1 = 19.3\, s$ $s_{\text{rel}} = 116\, m.$

2.17 – **a)** $t = 2.54\, s$ **b)** $\omega_f = 1.28\, s^{-1}$ **c)** $\left|\vec{R}\right|_{\text{max}} = 7.48\, N$ $\left|\vec{R}\right|_{\text{min}} = 7.25\, N$

2.18 – **a)** $|\omega_f| = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$ $L = 3.05\, m$

b) $|\theta^*| = \arccos\dfrac{3}{5}$ $|\omega^*| = \sqrt{\dfrac{6g}{5l}}$ $L = 5.63\, m$

2.19 – **a)** $T = 2.00\, s$ **b)** $|\vec{a}| = 5.66\, m/s^2$ $T = 1.86\, s$

2.20 – **a)** A **b)** A **c)** Nessuna **d)** B

e) Nessuna **f)** B **g)** A

2.21 – $\theta^* = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\cos\theta_0\right)$ $\omega^* = \sqrt{\dfrac{g\cos\theta_0}{l}}$

velocità finale del CM: $v_{cx} = \dfrac{1}{3}\sqrt{gl\cos^3\theta_0}$ $v_{cz} = -\dfrac{1}{6}\sqrt{3gl\cos\theta_0(9-\cos^2\theta_0)}$

2.22 – $b_0 = 36.5\, cm$ $\omega_{\text{max}} = 10.27\, s^{-1}$ $E_{\text{diss}} = -1.52\, J$

2.23 – **a)** **1)** $v = -\dfrac{v_0}{2}$ $\omega = \dfrac{v_0}{2l}$

2) $v = 0$ $\omega = \dfrac{v_0}{l}$

b) **1)** $|\vec{v}_0| = 5.6\, m/s$

2) $|\vec{v}_0| = 3.4\, m/s$

2.24 – **a)** $\omega_0 = 3.5\, s^{-1}$ **b)** $\theta_1 = 44°$

2.25 – **a)** $\omega = 2.76\, s^{-1}$ **b)** $I_x = -26.4\, Ns$ **c)** $z_f = 25\, cm$

2.26 – $v_x = 8.28\, m/s$ $v_z = -6.22\, m/s$ $V_x = -1.66\, m/s$

2.27 – Moto rototraslatorio con: $|\vec{v}_C| = 1.05\, m/s$ $\omega = 6\, rad/s$

$K_{\text{fin}} = 0.315\, J$ $K_{\text{diss}} = -0.126\, J$

2.28 – $V_{\text{max}} = 1.47\, m/s$

2.29 – **a)** $\omega_0 = 26.7\, s^{-1}$ **b)** $v_C = 0.57\, m/s$ $\Delta t = 3.73\, s$