Moti relativi

1 Composizione dei moti

1. Introduzione. Finora abbiamo osservato e studiato il nostro "fenomeno", cioè il moto di un corpo, da una certa "postazione" nella quale abbiamo introdotto un sistema di riferimento cartesiano, rispetto al quale è possibile specificare istante per istante la posizione del corpo (che in questa prima parte del corso consideriamo puntiforme). Ci si rende facilmente conto che tutte le caratteristiche del moto, quali lo spostamento in un certo intervallo di tempo o la velocità e l'accelerazione a un certo istante, risultano diversi se si cambia sistema di riferimento, ma son diversi ancor di più se si cambia "postazione". Ad esempio, una persona, seduta all'interno di un autobus in movimento lungo una strada, è in moto rispetto a un riferimento solidale al suolo ma è in quiete rispetto a un riferimento solidale alle pareti dell'autobus.

Abbiamo anche già evidenziato, studiando il moto di un grave, che è possibile considerare quel moto come composto da due moti ("componenti"): questo fatto, così come l'esempio della persona e dell'autobus, rientra come caso particolare nel problema della composizione dei movimenti di cui si occupò già Galileo Galilei. Di **Galileo** consigliamo di leggere([1]) un famoso brano dal **"Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo"** - *giorn.* 2^a [pag. 190 dell'edizione Einaudi NUE (1970)], nel quale vengono considerati due sistemi di riferimento, uno fisso sulla terra ed uno nella "postazione mobile" della nave. In quel caso particolare si sommano esattamente i due spostamenti finiti; ma possiamo generalizzare la sua intuizione, anticipando qui il risultato che vedremo più avanti e che vale solo per gli spostamenti infinitesimi, in un principio di sovrapposizione o dell'indipendenza dei moti: vedi PW: t.o.[1]

> **Qualunque sia la natura e il numero dei moti componenti di cui è dotato un corpo, lo spostamento subìto in un intervallo di tempo infinitesimo coincide con quello che si avrebbe se gli spostamenti dovuti ai diversi movimenti si effettuassero non simultaneamente ma successivamente e indipendentemente l'uno dall'altro.**

Dobbiamo chiarire che cosa significa "sovrapporre i moti"; è opportuno cominciare da spostamenti finiti e considerarne solo due: uno è quello dovuto ad un qualche corpo esteso che si sposti e l'altro è quello di un corpo puntiforme che si sposta su di esso. Introduciamo alcuni strumenti concettuali e un po' di nomenclatura.

2. Velocità relativa. Consideriamo in un certo sistema di riferimento il moto di due corpi puntiformi, C_1 e C_2, al passare del tempo: i vettori posizione e velocità

[1] Sulla PW = Pagina-Web 'http://people.na.infn.it/clarizia'

siano dati da:

$$\vec{r}_1(t)\ , \qquad \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1(t)\ \ ,$$
$$\vec{r}_2(t)\ , \qquad \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2(t)\ \ .$$

Consideriamo, allora, il vettore posizione del secondo rispetto al primo, questo è chiaramente dato da:

$$\vec{r}_{2,1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ .$$

Stiamo, cioè, esaminando la posizione di C_2 dalla "postazione" di C_1. La derivata del vettore "posizione relativa" è chiaramente la velocità di C_2 **relativamente** al corpo C_1 e la chiamiamo **velocità relativa**:

$$\frac{d}{dt}\,\vec{r}_{2,1} = \vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1\ ;$$

che è dunque data dalla differenza delle due velocità. Naturalmente $\vec{v}_{2,1} = -\vec{v}_{1,2}$. Analogamente possiamo definire una **accelerazione relativa**, per la quale varrà che $\vec{a}_{2,1} = -\vec{a}_{1,2}$.

sistema di riferimento fisso e mobile

3. Sistemi di riferimento mobili. Consideriamo ora un corpo esteso in movimento, questo si muove rispetto ad un certo ambiente, nel quale è stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano. Può risultare conveniente introdurre un secondo sistema di riferimento, solidale con il corpo esteso: chiameremo questo secondo sistema di riferimento "**sistema mobile**", mentre quello già introdotto nell'ambiente lo chiameremo "**fisso**". Questi due termini possono essere scambiati, perché il sistema "fisso", se osservato dal sistema "mobile", è esso... mobile.

Abbiamo detto che il corpo esteso, "sul" quale abbiamo introdotto il secondo sistema di riferimento, si muove; in che modo? Cominciamo da un caso semplice.

moto traslatorio

Def. : diremo che esso "**trasla**" se, per ogni istante t, le **velocità vettoriali** da cui sono animati i diversi punti del corpo sono tutte **uguali**; il movimento del corpo, rispetto al sistema fisso, si dice "**moto traslatorio**".

Dunque possiamo introdurre il secondo sistema con gli assi coordinati paralleli e concordi agli assi del sistema fisso e la condizione di moto traslatorio ci assicura che rimarranno tali al passare del tempo (naturalmente siamo liberi di introdurre gli assi del sistema mobile ruotati rispetto a quelli del sistema fisso, come nel caso di un piano inclinato, ad esempio, ma la condizione di moto traslatorio continua ad assicurarci che essi rimarranno paralleli a se stessi nel corso del tempo e quindi i loro versori rimarranno costanti rispetto al tempo). Il moto del sistema di riferimento **mobile** si dirà anch'esso **traslatorio**.

moto di trascinamento

Il corpo esteso di cui stiamo parlando può in realtà essere anche **virtuale**. Possiamo cioè immaginare che tutti i punti "geometrici" (dello spazio tridimensionale) individuati ciascuno da una ben precisa terna di coordinate nel sistema di riferimento mobile si muovano, **tutti** insieme e rigidamente, rispetto ai punti del sistema fisso. Nel caso di moto traslatorio, che stiamo qui considerando, si muoveranno tutti, ad ogni istante, con la stessa velocità. Nel caso più generale con velocità diverse. Si definisce **moto di trascinamento** il moto di **questi punti**.

Se il corpo puntiforme a cui è rivolta la nostra attenzione si muove sul corpo esteso, materiale o virtuale, il suo **moto** osservato dal sistema mobile sarà detto "**relativo**", mentre se osservato dal sistema fisso sarà detto "**assoluto**". moto assoluto e moto relativo

2 Moto di trascinamento traslatorio

È opportuno che vi soffermiate ad immaginare alcuni esempi semplici, con moto di trascinamento traslatorio rettilineo e uniforme, ad esempio immaginando il moto traslatorio di una "tavoletta" rigida. La figura 1 può esservi di aiuto, perché mostra i vettori che rappresentano le velocità dei singoli punti della tavoletta: queste, al passare del tempo, rimarranno sempre le stesse nel caso rettilineo uniforme o cambieranno (in modulo e/o in direzione), ma **sempre tutte insieme**, nel caso generale del moto traslatorio.

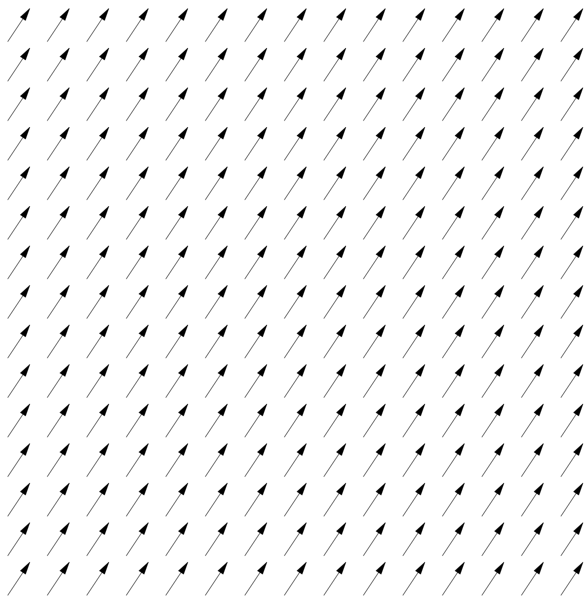

Figura 1: *Campo di velocità, ad un certo istante* t*, per una traslazione.*

Ora, consideriamo un corpo puntiforme C che si muove sulla tavoletta, la quale si muove di moto traslatorio qualsiasi. Consideriamo, **ad un certo istante**, il vettore posizione di C rispetto all'origine O di S_F, un sistema di riferimento fisso, poi il suo vettore posizione rispetto all'origine O' di S_M, un sistema di riferimento mobile, introdotto opportunamente sulla tavoletta e infine il vettore posizione di O' rispetto a O. Sia P il punto geometrico di S_F in cui si trova C e sia P' il punto di S_M "coincidente" in quell'istante con P; possiamo scrivere equivalentemente:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OO'} + \overline{O'P'} \\ \vec{r} &= \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,' \, . \end{aligned} \qquad (1)$$

Usiamo, per comodità, il primo " $'$ " per indicare le grandezze nel sistema di riferimento mobile e quindi chiamiamo x_i' le coordinate di P', mentre chiamiamo x_i quelle di P e chiamiamo X_i quelle di O', rispetto a S_F. Inoltre chiamiamo $\hat{u}_i'$ i versori degli assi di S_M e $\hat{u}_i$ i versori degli assi di S_F; naturalmente l'indice i va da 1 a 3.

Dunque:

$$\vec{r} = x_1\hat{u}_1 + x_2\hat{u}_2 + x_3\hat{u}_3 \quad (2)$$
$$\vec{r}' = x'_1\hat{u}'_1 + x'_2\hat{u}'_2 + x'_3\hat{u}'_3 \ ; \quad (3)$$

i tre versori $\hat{u}'_i$ non cambiano orientamento (nel tempo) rispetto al sistema S_F, anzi prendiamoli, come già detto, paralleli e concordi con gli $\hat{u}_i$ (tranne che per il punto di applicazione, che è O', essi coincidono con $\hat{u}_i$); in questo caso le coordinate x'_i sono esattamente le stesse, in qualunque istante, anche rispetto a S_F e dunque:

$$x_i = X_i + x'_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \ .$$

Se le consideriamo ad un tempo t e poi ad un tempo $t + \Delta t$ e sottraiamo membro a membro, otteniamo:

$$\Delta x_i = \Delta X_i + \Delta x'_i \ , \quad (4)$$

cioè

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_{O'} + \Delta\vec{r}' \ . \quad (5)$$

In queste relazioni, il primo termine al secondo membro rappresenta lo spostamento dell'origine del sistema mobile e questo è anche uguale (come vettore) allo spostamento di qualunque punto P' di tale sistema; dunque esse esprimono la composizione degli spostamenti: gli spostamenti (componenti) che chiameremo "di trascinamento" e "relativo" si compongono a dare lo spostamento "assoluto", come se fossero eseguiti indipendentemente l'uno dall'altro, non importa con quale ordine temporale essi vengano eseguiti.

Si osservi la figura 2 per visualizzare quanto appena detto. In un intervallo di tempo Δt un corpo C si muove sulla tavoletta lungo una traiettoria curva da un punto P' ad un punto P'_1, che sono punti nel sistema mobile S_M; contemporaneamente, la tavoletta si muove di moto traslatorio rispetto al sistema S_F, per cui, mentre a P' corrisponde P, a P'_1 corrisponderà P_3.

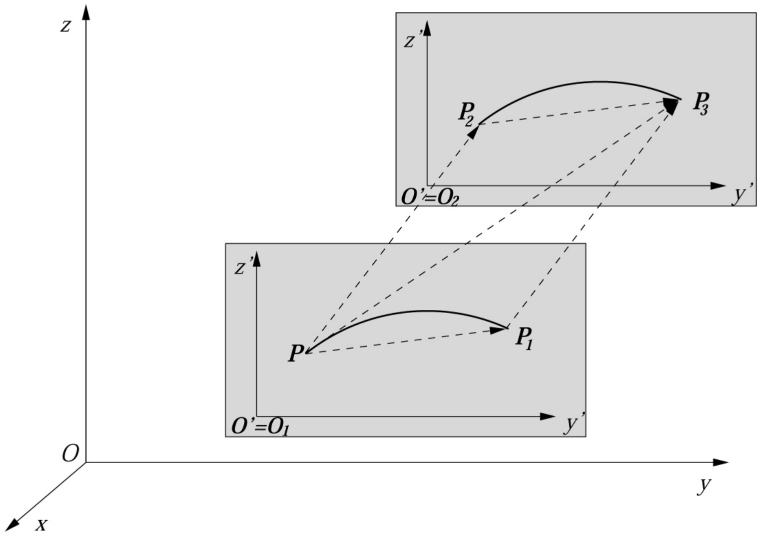

Figura 2: *Esemplificazione della composizione dei moti in caso di moto traslatorio di una tavoletta.*

Dalla figura si vede che $\overline{PP_2} = \overline{O_1O_2}$; cioè lo spostamento subìto dal punto P' pensato solidale alla tavoletta, che è lo spostamento di trascinamento, è uguale allo spostamento subìto dall'origine O' (perché il moto di trascinamento è traslatorio). Lo spostamento assoluto $\Delta\vec{r}$ è rappresentato dal vettore $\overline{PP_3}$, e lo spostamento relativo $\Delta\vec{r}'$ dal vettore $\overline{PP_1}$ o, equivalentemente, dal vettore $\overline{P_2P_3}$: dunque, si può scrivere:

$$\overline{PP_3} = \overline{PP_1} + \overline{P_1P_3} = \overline{PP_2} + \overline{P_2P_3} \ .$$

Bene, questo risultato dipende, in maniera cruciale, dal fatto che i versori del sistema mobile rimangono costantemente paralleli a se stessi e non può essere vero se il moto di trascinamento **non** è traslatorio.

Consideriamo ora, in conclusione, esplicitamente le dipendenze temporali nelle equazioni (**??**), (2) e (**??**), in modo da ottenere, per derivazione rispetto al tempo, le relazioni per le velocità e le accelerazioni. Scriviamo la (**??**) così:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\hat{u}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} X_i(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\,\hat{u}'_i \ ;$$

dove gli $\hat{u}'_i$ non dipendono dal tempo. Deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{dX_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}(t)\,\hat{u}'_i \ ,$$

cioè

$$\vec{v}_a(t) \quad = \quad \vec{v}_{O'}(t) + \vec{v}_r(t) \quad = \quad \vec{v}_{tr}(t) + \vec{v}_r(t) \ ; \qquad (6)$$

dove con gl'indici $_a$, $_{tr}$ e $_r$ indichiamo "assoluto", "di trascinamento" e "relativo".

Derivando di nuovo si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d^2x_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2X_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2x'_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}'_i \ ;$$

cioè

$$\vec{a}_a(t) \quad = \quad \vec{a}_{O'}(t) + \vec{a}_r(t) \quad = \quad \vec{a}_{tr}(t) + \vec{a}_r(t) \ . \qquad (7)$$

Queste sono le relazioni per le velocità e le accelerazioni nel caso del moto di trascinamento traslatorio; esse nell'applicarle alla risoluzione degli esercizi saranno per lo più proiettate sugli assi, al fine di ottenere opportune equazioni algebriche.

3 Moto di trascinamento qualsiasi

1. Introduzione. Consigliamo di soffermarsi, prima di proseguire, a considerare anche il caso più semplice di moto **non** traslatorio, cioè il **moto rotatorio**, uniforme (naturalmente può anche essere uniformemente accelerato o vario), come ad esempio quello della piattaforma di una giostra. Si chiama **moto rotatorio** di un corpo esteso, ed anche di una terna di assi cartesiani, quel moto che avviene intorno ad una retta qualsiasi, che si dice **asse di rotazione**, i cui punti sono tutti fermi, e soltanto loro lo sono, nel corso del tempo (asse **fisso**). Potete pensare alla piattaforma di una giostra (in 2 dimensioni) o al globo terrestre (in 3 dimensioni). Tutti i punti del

moto rotatorio

corpo esteso, che **ruota**, si muovono di moto circolare (con traiettoria appartenente ad un piano perpendicolare all'asse) di raggio uguale alla distanza dall'asse, e tutti questi moti circolari hanno la **stessa velocità angolare** ω, per via della rigidità del corpo. Come sarà il campo delle velocità, ad un certo istante? Lo trovate rappresentato, a 2-d, nella figura 3.([2])

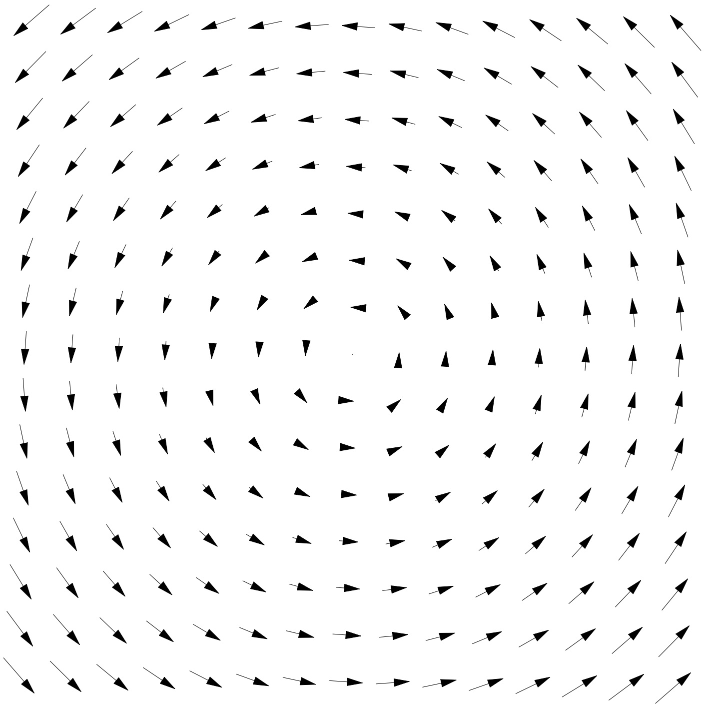

Figura 3: *Campo di velocità, ad un certo istante t, per una rotazione. Il punto centrale per il quale passa l'asse di rotazione resta fermo. Si noti come le velocità crescano, in modulo, man mano che ci si allontana dall'asse di rotazione.*

Potete, poi, immaginare esempi diversi con disegni o tavolette (quaderni, cartoncini, ecc.) e tornare a ragionare sulle equazioni (**??**) e (**??**) e confrontare i diversi vettori spostamento; l'eguaglianza **non** sussiste se il moto di trascinamento non è traslatorio, sia perché gli spostamenti di trascinamento **cambiano punto per punto**, sia perché, se ruotano i versori del sistema mobile, le componenti degli spostamenti relativi non sono le stesse rispetto al sistema fisso!

Se consideriamo, però, un intervallo di tempo **infinitesimo** e gli spostamenti sono dunque infinitesimi e purché si faccia bene attenzione a qual è lo spostamento (infinitesimo) di trascinamento (che è quello del punto P' per il quale transita in quell'istante il corpo C), potremo scrivere, qualunque sia il moto di trascinamento, la somma vettoriale:

$$d\vec{s}_a = d\vec{s}_{tr} + d\vec{s}_r \ . \qquad \left[\text{qualunque sia il moto di trascinamento di } S_M \text{ rispetto ad } S_F.\right]$$

[2]Complemento: per esercizio, vi proponiamo un interessante quesito. Se componiamo i due moti della figura 1 e della figura 3, cioè facciamo la somma vettoriale delle velocità, punto per punto, che cosa otteniamo? (Nient'altro che una rotazione? E dove sarà il nuovo asse di rotazione? Provate a discutere la questione).

Lo vedremo in dettaglio nella sezione 3, ma qui possiamo dividere per dt l'equazione precedente ed ottenere:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_r \; .$$

ATTENZIONE, in questa equazione la **velocità di trascinamento**, cioè la $\vec{v}_{tr}$, sarà: la velocità, all'istante t, di quel particolare punto del corpo esteso, o punto geometrico dello spazio tridimensionale associato al sistema **mobile**, per il quale "transita", in quell'istante, il corpo C di cui ci stiamo occupando. Solo nel caso di moto di trascinamento traslatorio quella velocità è uguale per tutti i punti e quindi uguale a quella dell'origine del sistema!

velocità di trascinamento

Ma vediamo come deve essere impostato matematicamente il problema della relazione tra i moti componenti (velocità e accelerazioni) nel caso generale.

2. Derivata di vettori ruotanti. È indispensabile, innanzi tutto, riprendere l'argomento del vettore variabile nel tempo, ma a modulo costante, cioè di quello che abbiamo chiamato vettore "ruotante". Nel caso di rotazione in un piano, intorno ad un asse, perpendicolare al piano e passante per il punto di applicazione, con velocità angolare costante, è stata cosa facile calcolarne la derivata temporale; la scriviamo nella forma della cosiddetta **formula di Poisson**:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A} \; .$$

Provate a rispondere. Come è stato introdotto il vettore $\vec{\omega}$? E se la velocità angolare non è costante, cambia qualcosa?

Passiamo al caso in cui il vettore $\vec{A}$ forma un angolo diverso da $\frac{\pi}{2}$ con l'asse di rotazione, e quindi è scomponibile in un vettore ruotante $\vec{A}_\perp$ perpendicolare all'asse e in un **vettore costante** $\vec{A}_\parallel$ giacente sull'asse di rotazione. Otteniamo facilmente:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d(\vec{A}_\perp + \vec{A}_\parallel)}{dt} = \frac{d\vec{A}_\perp}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{A} \; .$$

(Nel penultimo passaggio è stato aggiunto il prodotto vettoriale di $\vec{\omega}$ per $\vec{A}_\parallel$ che è ovviamente nullo). È ancora valida, dunque, la formula di Poisson!

E consideriamo, ora, un intero sistema di assi cartesiani che ruoti (ad es. si può pensare ad un sistema di riferimento che venga introdotto solidale ad un qualche corpo esteso ruotante, come nel caso della sfera terrestre); esso ruota allora intorno ad un asse passante per la sua origine e l'origine dunque rimane ferma e, così, tutti e solo i punti dell'asse rimangono fermi durante il moto rotatorio. Ebbene, si può scrivere la formula di Poisson per ognuno dei tre versori degli assi del sistema ruotante (siano questi $\hat{u}'_i$) e con lo stesso $\vec{\omega}$ naturalmente:

$$\frac{d\hat{u}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}'_i \qquad i = 1, 2, 3 \; .$$

3. Le relazioni tra le velocità e le accelerazioni. Riscriviamo le relazioni dei vettori posizione, che abbiamo già scritte nel paragrafo precedente, e operiamo le derivazioni successive rispetto al tempo, generalizzando al caso di un moto qualsiasi del sistema mobile rispetto al sistema fisso:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OO'} + \overline{O'P'} \\ \vec{r} &= \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,' \; ; \end{aligned}$$

scomponiamo i vettori sugli assi ed esplicitiamo le dipendenze temporali:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\hat{u}_i \;=\; \sum_{i=1}^{3} X_i(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\,\hat{u}_i'(t)\ .$$

Dobbiamo ora derivare rispetto al tempo, che, da un punto di vista formale, è un'operazione "facile", cioè ben definita, con delle regole precise (come la regola di derivazione del prodotto di funzioni); ma il punto delicato è l'interpretazione geometrica e fisica dei passaggi e l'identificazione delle singole grandezze fisiche. Ad esempio deve esser chiaro che la velocità e l'accelerazione del corpo C nel suo moto **assoluto**, cioè visto dal sistema fisso S_F, sono banalmente date da $\vec{v}_a(t) = \sum_i \frac{dx_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i$ e da $\vec{a}_a(t) = \sum_i \frac{d^2x_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i$; mentre la velocità e l'accelerazione del corpo C nel suo moto **relativo**, visto dal sistema S_M, sono date da $\vec{v}_r(t) = \sum_i \frac{dx_i'}{dt}(t)\,\hat{u}_i'(t)$ e da $\vec{a}_r(t) = \sum_i \frac{d^2x_i'}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i'(t)$.

Procediamo allora con la derivazione, membro a membro, della formula precedente ed usiamo la formula di Poisson:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dX_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\frac{d\hat{u}_i'}{dt}(t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt}(t)\,\hat{u}_i'(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{dX_i}{dt}(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)\,(\vec{\omega}(t) \times \hat{u}_i'(t)) + \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i'}{dt}(t)\,\hat{u}_i'(t)\ , \end{aligned} \tag{8}$$

cioè

$$\vec{v}_a(t) \;=\; \vec{v}_{O'}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}\,'(t) + \vec{v}_r(t)\ . \tag{9}$$

Nelle due formule il secondo termine a secondo membro è la velocità di rotazione del punto P' del sistema S_M, per il quale transita il corpo C all'istante t, rispetto al sistema S_F. Essa è dovuta alla rotazione del sistema S_M intorno ad un asse eventualmente variabile nel tempo, la cui direzione può essere rappresentata istante per istante da un versore applicato in O', $\hat{a}(t)$ ($\leftarrow$ versore con orientamento fisso, quello delle rotazioni antiorarie), sul quale il vettore $\vec{\omega}$ ha dunque proiezione ω positiva o negativa. In questo caso generale,

moto roto-traslatorio con asse di rotazione variabile

$$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

e otteniamo la formula di composizione delle velocità, già mostrata nel paragrafo precedente:

$$\vec{v}_a(t) = \vec{v}_{tr}(t) + \vec{v}_r(t)\ .$$

Queste formule sono vettoriali ed è possibile prenderne le componenti sia nel sistema fisso che in quello mobile, purché tutti i vettori siano proiettati nello stesso riferimento.

Deriviamo ora rispetto al tempo l'equazione (**??**):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i &= \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 X_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}(t)\;(\vec{\omega}\times\hat{u}'_i) + \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{u}'_i\right) + \\ &+ \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\,\hat{u}'_i\right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 x'_i}{dt^2}(t)\,\hat{u}'_i(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}(t)\;(\vec{\omega}\times\hat{u}'_i)\;;\end{aligned}$$

riordiniamo e identifichiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a}_a(t) &= \underbrace{\vec{a}_{O'}(t) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}_{\vec{a}_{tr}} + \vec{a}_r(t) + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \\ &= \vec{a}_{tr} + \vec{a}_r + \vec{a}_{Co}\;. \qquad (10)\end{aligned}$$

Su quest'ultima equazione alcuni commenti sono necessari. Ben tre termini sono stati inglobati nell'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_{tr}$. Il primo è l'accelerazione dell'origine del sistema mobile; essa, lo sottolineamo, rimane unica "rappresentante" dell'accelerazione di trascinamento nel caso di moto traslatorio. Il secondo è molto simile all'accelerazione tangenziale di un moto circolare; nel caso di rotazione di S_M con asse fisso (e quindi vettore $\vec{\omega}$ costante in direzione) esso è proprio l'accelerazione tangenziale del moto circolare di P' nel piano perpendicolare all'asse, passante per esso. Infine, il terzo termine è esattamente l'accelerazione centripeta nel moto circolare suddetto (che istantaneamente esisterà sempre, anche nel caso più generale in cui l'asse non è fisso). L'insieme dei tre termini esaurisce tutte le possibilità di moti di trascinamento (una trattazione completa di questo argomento si può trovare, ad esempio, sui vecchi testi di "Meccanica Razionale" ed esula quindi dagli scopi del nostro corso).

Il quinto termine è peculiare, è detto **accelerazione di Coriolis**. È difficile comprenderne il significato se non facendo molti esercizi e quindi accumulando esperienza nel corso del tempo.

Qui suggeriamo l'esercizio 4.13 dell'Unità A delle Esercitazioni del Corso. In questo esercizio, la rotazione della piattaforma è anti-oraria e quindi ω è positiva. Come è stato detto nel paragrafo 1.3 di questa nota, a proposito dei sistemi di riferimento, qui in Cinematica si possono scambiare gli attributi di "fisso" e "mobile"; solo in Dinamica il sistema di riferimento "fisso" è per lo più identificato con un sistema di riferimento "inerziale".

E allora, introdotti i sistemi di riferimento $x-y$ sul pavimento e $x'-y'$ sulla piattaforma (secondo la convenzione usuale), provate a rappresentare nel sistema della piattaforma, inteso qui come **fisso**, il moto della pallina che si svolge sul pavimento (il quale, e con esso l'asse x **mobile** lungo il quale si svolge il moto della pallina, ruota con velocità angolare $-\omega$). La figura 4 può aiutarvi: rappresentate il vettore posizione $\vec{r}(t)$ della pallina proiettandolo sugli assi $x'-y'$ della piattaforma e poi operate le due derivate temporali successive in modo da ottenere le componenti cartesiane della velocità e dell'accelerazione (qui **assolute**); riconoscerete facilmente, come componenti, la velocità di trascinamento e quella relativa (cioè quella nel sistema di riferimento del pavimento), l'accelerazione di trascinamento e quella di Coriolis (mentre è ovviamente nulla quella relativa), esattamente come indicato nelle (**??**) e (**??**), e potrete disegnare assai utilmente questi vettori.

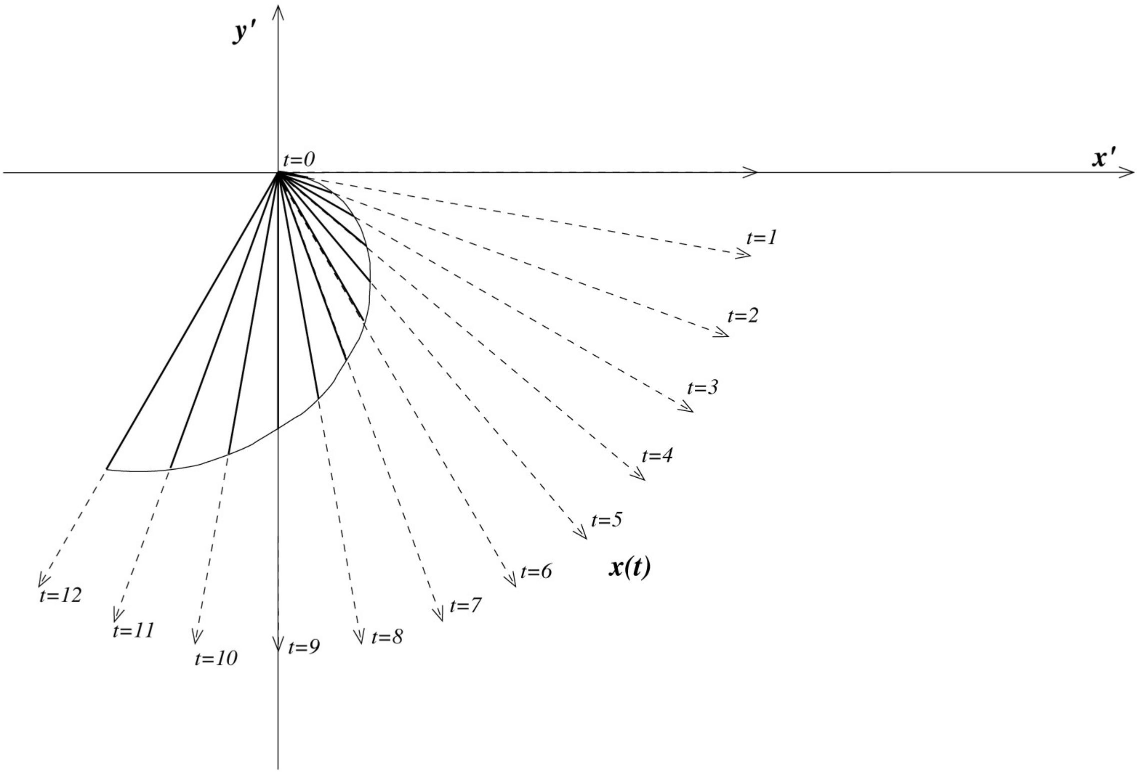

Figura 4: *Il sistema di riferimento $x' - y'$, in questa figura, è quello solidale alla piattaforma ruotante, mentre l'asse x è solidale al pavimento e quindi dalla piattaforma è visto ruotare in senso orario. Su di esso giace il vettore posizione $\vec{r}(t)$. L'unità di misura dei tempi può essere il secondo (ma non necessariamente); la velocità angolare è $\omega = 0.174533\, rad/s$ che corrisponde a $10°/s$; la velocità della pallina, rispetto al pavimento, è $\vec{V}$, che può essere espressa in mm/s secondo la lunghezza reale del segmento a tratto continuo, così come risulta una volta stampata la figura.*

Fatto questo, potete scambiare i ruoli dei due sistemi di riferimento, quello fisso è sul pavimento e quello mobile è sulla piattaforma. Nelle relazioni vettoriali per le velocità e le accelerazioni, equazioni (**??**) e (**??**), la velocità assoluta è $\vec{V}$ e l'accelerazione assoluta è nulla, la velocità relativa e l'accelerazione relativa sono i due vettori che vogliamo trovare, spostando a primo membro gli altri termini; per la velocità la cosa è piuttosto semplice e si ottiene l'ω con il segno negativo, bene; per l'accelerazione si avrebbe un'accelerazione centripeta che, cambiando segno, diventerebbe centrifuga, ma, ecco, è proprio l'accelerazione di Coriolis a rimettere le cose a posto dopo aver inserito l'espressione precedentemente ottenuta della velocità relativa ed ottenendone così due termini. Lasciamo a voi il piacere della scoperta e della verifica che nei due modi suggeriti si ottengono, ovviamente, gli stessi risultati. Buon lavoro.