UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
Facoltà di Scienze
**Corso di Laurea in FISICA**

# Esercitazioni
# di
# MECCANICA e TERMODINAMICA

Anno Accademico 2014–2015

UNITÀ **A**

*Cinematica*

[a cura di Alberto Clarizia]

# 1 Moti in una dimensione

## 1.1 Esercizi introduttivi

**Esercizio 1.1** Due automobili A e B percorrono lo stesso rettilineo nei due modi seguenti:
A al tempo $t = 0.0\,h$ è nella posizione $s = 2.4\,km$ e si sta muovendo con una velocità costante $v_A = 40\,km/h$.
B al tempo $t = 0.5\,h$ è nella posizione $s = 0.0\,km$ e si sta muovendo con una velocità costante $v_B = 70\,km/h$.

C'è un sorpasso? In caso affermativo, chi sorpassa chi? In quale posizione avviene il sorpasso? A quale tempo?

Risolvere il problema in due modi diversi:
- *graficamente*, riportando le due leggi orarie sullo stesso grafico;
- *algebricamente*, risolvendo il sistema di due equazioni lineari in due incognite.

**Esercizio 1.2** Il grafico mostrato nella Figura 1 illustra come varia nel tempo la posizione di due carrelli A e B che si muovono su due binari rettilinei paralleli (su di essi è stato introdotto un sistema di coordinate $s$ con le due origini sulla stessa perpendicolare ai due binari).

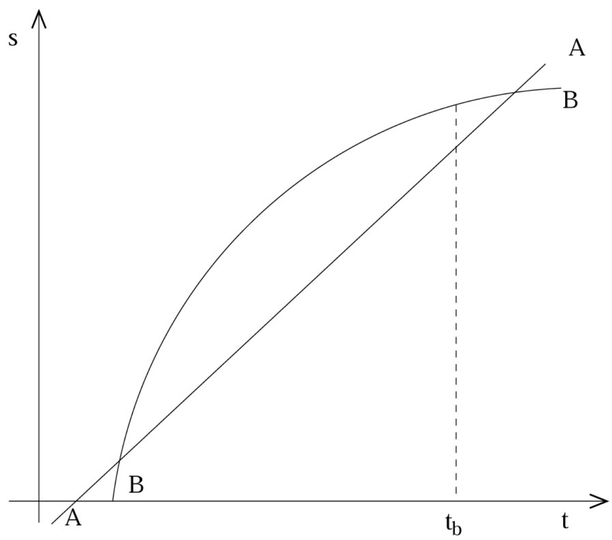


Figura 1: relativa all'esercizio **1.2**

**a)** Indica sull'asse dei tempi, col simbolo $t_S$, l'istante o gli istanti in cui un carrello sorpassa l'altro.

**b)** Quale carrello, A o B, si muove più velocemente al tempo $t_b$?

**c)** Indica sull'asse dei tempi, col simbolo $t_V$, l'istante o gli istanti in cui i due carrelli hanno la stessa velocità.

**d)** Nell'intervallo di tempo riportato in figura la velocità del carrello B sta
- aumentando sempre
- diminuendo sempre
- aumentando per parte del tempo e diminuendo per parte del tempo

(Indica la risposta considerata corretta e danne una breve spiegazione).

**Esercizio 1.3** Un autovelox registra il passaggio di un'auto A con una velocità $v_A = 126\,km/h$ e dopo 10 secondi il passaggio di un'auto B con una velocità $v_B = 144\,km/h$.

Dopo quanti secondi dal passaggio davanti all'autovelox l'auto B raggiungerà l'auto A? Quanti metri dovrà percorrere per raggiungerla?

## 1.2 Esercizi con maggiore formalizzazione

**Esercizio 1.4** Le posizioni di due punti materiali $P_1$ e $P_2$ (l'unità di misura sull'asse $x$ è il *metro* e sull'asse dei tempi è il *secondo*) sono date da:

$$x_1(t) = (5 + 3t + 2t^2) \qquad\qquad x_2(t) = (1 - t + 5t^2).$$

(a) Dopo quanto tempo i due punti materiali collidono?
(b) Qual è la differenza tra le loro velocità nell'istante di collisione?

**Esercizio 1.5** Un'automobile è ferma a un semaforo e, quando la luce diventa verde, accelera costantemente per un intervallo di tempo $\Delta t = 6\,s$ con un'accelerazione $a = 2\,m/s^2$ e poi si muove con velocità costante. Nell'istante in cui l'automobile è partita, essa è stata sorpassata da un autocarro in moto nella stessa direzione e nello stesso verso con una velocità $v_B = 10\,m/s$.

**a)** Si costruiscano i diagrammi per il moto dell'automobile e per quello dell'autocarro usando gli stessi assi coordinati.

**b)** Quando l'automobile raggiungerà l'autocarro?

**c)** Quanto cammino avrà percorso l'automobile quando raggiungerà l'autocarro?

**Esercizio 1.6** Un'auto supera un incrocio a una velocità $v = 72\,km/h$ e prosegue alla stessa velocità. Ad un istante successivo, $t_1 = 5\,s$, un'auto della polizia stradale in servizio a quell'incrocio parte al suo inseguimento procedendo con un'accelerazione costante $a_P = 2\,m/s^2$.

**a)** Quando e a che distanza dall'incrocio la polizia stradale supera l'auto?

**b)** Qual è la velocità della polizia in quel momento?

**Esercizio 1.7** Il tachimetro di un'auto, che percorre una strada diritta, a un certo punto segna una velocità $v_1 = 20\,km/h$ e $l = 200\,m$ più avanti una velocità $v_2 = 70\,km/h$.
(a) Supponendo che l'accelerazione sia stata costante, quale valore si ricava per l'accelerazione e quale valore per il tempo di percorrenza, a partire dai dati del tachimetro?
(b) Disponendo di un cronometro di precisione il conducente verifica, però, che il tempo di percorrenza effettivo è $\Delta t = t_2 - t_1 = 18\,s$. Per controllare, allora, la precisione del suo tachimetro egli compie un tratto di $L = 2\,km$ mantenendo il tachimetro costantemente su $70\,km/h$ e verifica che il tempo di percorrenza è $100\,s$. Calcolare le due velocità e l'accelerazione *effettive* dell'auto nel tratto iniziale di $200\,m$.

**Esercizio 1.8** Consideriamo una velocità che dipende linearmente dal tempo; essa è descritta da una funzione il cui grafico è costituito da due tratti rettilinei (di ampiezza uguale, $T$) con pendenza opposta, cioè un grafico la cui forma è simile alla lettera **V** capovolta.

Introducendo le opportune costanti (arbitrarie), scrivere l'espressione della posizione in funzione del tempo, cioè la "legge oraria", $s(t)$ e disegnarne il grafico nei seguenti casi: i) la funzione $v(t)$

nasce nell'origine ed è sempre positiva salvo negli estremi; ii) $v(t)$ è in parte positiva ed in parte negativa; iii) $v(t)$ è negativa e tocca l'asse dei tempi nel suo punto angoloso.

**Esercizio 1.9** All'istante $t = 0$, un treno parte con un'accelerazione scalare iniziale $a_0 = 0.4\, m/s^2$; l'accelerazione diminuisce poi linearmente col tempo e si annulla all'istante $T$ in cui il treno ha raggiunto una velocità scalare $V_f = 90\, km/h$. Si determini lo spazio $S$ percorso dal treno fino all'istante $T$.

**Esercizio 1.10** Una ruota inizialmente in quiete viene messa in rotazione attorno al suo asse e la sua velocità angolare cresce uniformemente per un intervallo di tempo $t_1 = 10\, s$ fino a raggiungere il valore $\omega_1 = 10\, \pi\ rad/s$; la velocità angolare viene poi mantenuta costante per un intervallo di tempo $t_2 - t_1 = 5\, s$, dopodiché viene fatta diminuire uniformemente e in un intervallo di tempo $t_3 - t_2 = 10\, s$ la ruota si arresta. Si calcoli il numero $N$ complessivo dei giri fatti dalla ruota.

**Esercizio 1.11** Un corpo viene lanciato verso l'alto a partire dal suolo e ricade nel punto di partenza. Sapendo che nell'ultimo secondo di volo percorre uno spazio di $20\, m$, si determini la sua velocità iniziale $v_0$ e la massima altezza $h$ da esso raggiunta. Si trascuri la resistenza dell'aria.

**Esercizio 1.12** Un sasso viene lasciato cadere con velocità nulla da un'altezza $H = 50\, m$ e nello stesso istante un altro sasso viene lanciato in alto sulla stessa verticale da un'altezza $h = 10\, m$ con velocità iniziale $v_0$.

**a)** Se i due sassi si urtano ad un'altezza di $20\, m$, quanto vale $v_0$ e che velocità hanno rispettivamente i due sassi subito prima dell'urto?

**b)** Calcolare il valore minimo di $v_0$ per il quale i due sassi si urtano giungendo al suolo.

**Esercizio 1.13** Una palla da tennis è lasciata cadere dal terrazzo di un grattacielo. L'abitante di un appartamento osserva che la palla impiega un tempo $\Delta t = 0.25\, s$ per attraversare tutta la sua finestra, di altezza $h = z(t_1) - z(t_2) = 2.5\, m$. La palla da tennis cade fino al suolo dove rimbalza elasticamente (riparte cioè con la stessa velocità in modulo) e riappare al bordo inferiore della finestra $4\, s$ dopo averla superata. Determinare quanto tempo impiega per cadere dal terrazzo al suolo, $t_{\rm tot}$, e l'altezza $H$ del terrazzo rispetto al suolo (trascurare la resistenza dell'aria).

**Esercizio 1.14** Il moto di un carrello su di un binario rettilineo può essere rilevato mediante un sonar (che emette e riceve impulsi sonori) ed una scheda di acquisizione che elabora e trasmette dati ad un computer in tempo reale.

Ammettiamo di aver selezionato una frequenza di emissione degli impulsi di $\nu = 10\, s^{-1}$ su un intervallo di acquisizione $T = 5\, s$ e che lo strumento invii ad istanti $t_1^{(n)}$ gli impulsi e li riceva di ritorno, una volta riflessi, ad istanti $t_2^{(n)}$ (secondo le due tabelle, simulate (!), contenute nei files: "http://people.na.infn.it/clarizia/lavori_casa_10-11/carrelli_e_sonar1.txt"e "http://people.na.infn.it/clarizia/lavori_casa_10-11/carrelli_e_sonar2.txt").

Quale operazione esegue il software su questi dati e quali sono i relativi moti dei due carrelli? Rappresentare i due moti analiticamente e graficamente con l'ausilio di un foglio elettronico [velocità del suono in aria ed a temperatura ambiente: $v_S = 344\, m/s$] [Si può consultare la guida all'uso di EXCEL citata nell'esercizio **3.6**].

# 2 Vettori

**Esercizio 2.1** La Figura 2 seguente rappresenta gli spostamenti successivi di un aereo che sta volando seguendo una rotta di ricerca. La posizione iniziale dell'aereo è $A$ e la posizione finale è $D$. Gli assi del sistema di riferimento sono: (Sud $\to$ Nord) $\equiv$ $\mathbf{y}$) e (Ovest $\to$ Est) $\equiv$ $\mathbf{x}$). Lo spostamento $\vec{AB}$ ha modulo $|\vec{AB}| = 18.0\,km$; lo spostamento $\vec{BC}$ ha modulo $|\vec{BC}| = 9.5\,km$ e lo spostamento $\vec{CD}$ ha modulo $|\vec{CD}| = 12.0\,km$.

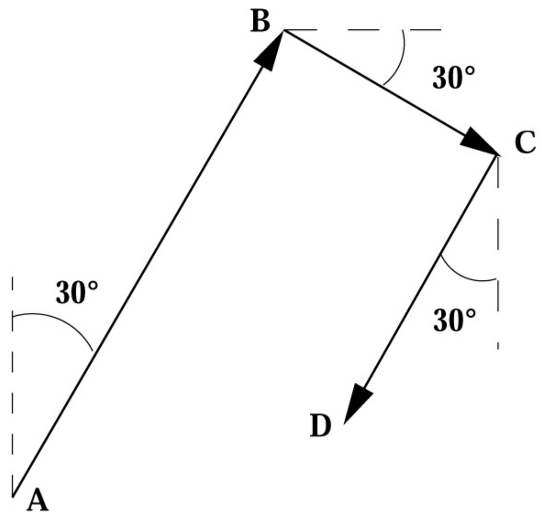


Figura 2: relativa all'esercizio **2.1**

Qual è lo spostamento risultante (modulo e orientamento) tra $A$ e $D$? Si trovi la risposta sia graficamente (eseguendo accuratamente un disegno della grandezza di una pagina con un goniometro e una riga graduata e misurando il risultante) sia trigonometricamente (risolvendo triangoli).

**Esercizio 2.2** Quali tra i seguenti vettori sono mutuamente perpendicolari? Le terne di numeri indicano le componenti cartesiane ($x$, $y$ e $z$ nell'ordine) del vettore.

$$\vec{A} = (2,\ 1,\ 1)\ ; \quad \vec{B} = (0,\ 0,\ 2)\ ; \quad \vec{C} = (1,\ -2,\ 0)\ ; \quad \vec{D} = (1,\ 1,\ -3)\ ; \quad \vec{E} = (9,\ 5,\ 3)\ .$$

**Esercizio 2.3** Dati i cinque vettori dell'esercizio **2.2**, determinare i vettori componenti di $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ ed $\vec{E}$ nella direzione parallela ad $\vec{A}$.

**Esercizio 2.4** Il vettore $\vec{C}$ somma di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ha modulo $|\vec{C}| = 10\,u$ e forma un angolo $\alpha = 60°$ con $\vec{A}$, il cui modulo è $|\vec{A}| = 12\,u$. Trovare il modulo di $\vec{B}$ e l'angolo $\theta$ compreso tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

**Esercizio 2.5** Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, di moduli $|\vec{A}| = 8\,u$ e $|\vec{B}| = 10\,u$, che formano un angolo $\theta = 60°$, determinare il modulo $|\vec{D}|$ del vettore $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ e l'angolo $\beta$ formato da questo con $\vec{A}$.

**Esercizio 2.6** A quale dei cinque vettori dell'esercizio **2.2** è parallelo il vettore $\vec{F} = (-2,\ -2,\ 6)$? Che relazione esiste tra le componenti di due o più vettori paralleli?

**Esercizio 2.7** Dimostrare che i seguenti vettori:

$$\vec{A} = 2\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k} \qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \vec{C} = -3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}$$

formano i lati di un triangolo.

**Esercizio 2.8** Per verificare la regola del parallelogramma per la composizione delle forze (vettori), ci si serve dell'apparecchio mostrato schematicamente nella Figura 3 seguente. Due fili flessibili e inestensibili, di peso trascurabile, passano su due carrucole **A** e **B** e recano da un lato, rispettivamente, i pesi $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ e dall'altro sono annodati in un punto $P$, cui è fissato un terzo peso $\vec{p}_3$. In caso di equilibrio si può considerare che i fili nel punto $P$ esercitino delle forze di moduli esattamente uguali a quelli dei tre pesi, rispettivamente, e con le relative direzioni e versi.

Se $|\vec{p}_1| = 30\,g(peso)$ e $|\vec{p}_2| = 50\,g(peso)$, quale valore dovrà avere $|\vec{p}_3|$ affinché, a equilibrio raggiunto, l'angolo fra i due fili in $P$ risulti di 60°? Quali saranno allora gli angoli $\alpha$ e $\beta$ tra i fili e la verticale?

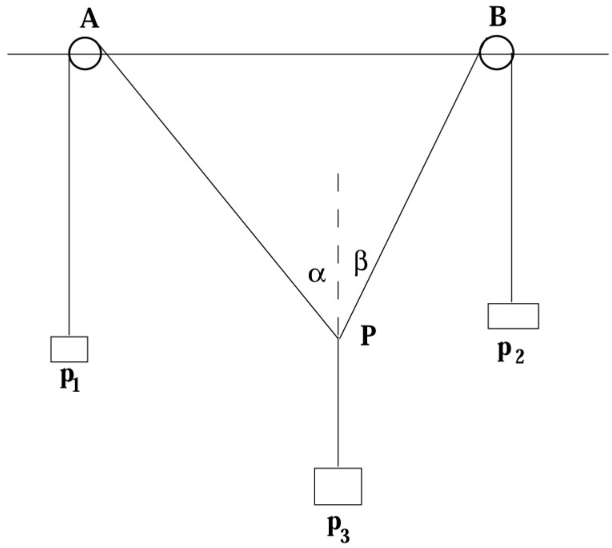


Figura 3: relativa all'esercizio **2.8**

**Esercizio 2.9** Determinare la forma generale di un vettore perpendicolare ai seguenti due vettori:

$$\vec{A} = 3\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\,\hat{k} \qquad \vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - \hat{k}.$$

**Esercizio 2.10** Individuato un piano mediante i tre punti (1, 2, 2), (2, 0, −2) e (3, 1, 1), determinare il vettore unitario $\hat{n}$ perpendicolare a questo piano. È unico?

**Esercizio 2.11** Dati i due vettori $\vec{A} = (2,\,1,\,1)$ e $\vec{B} = (1,\,-1,\,-1)$, **(a)** determinare il seno dell'angolo compreso tra essi. **(b)** Qual è l'area del triangolo formato da questi due vettori e dal segmento che congiunge i loro vertici?

**Esercizio 2.12** Tre forze complanari applicate in un punto hanno intensità di $4\,N(Newton)$, $5\,N$ e $6\,N$ rispettivamente; se il punto è in equilibrio, quali sono gli angoli fra le tre forze (calcolare a meno di un decimo di grado).

**Esercizio 2.13** Si dimostri graficamente che, se gli assi $x'$, $y'$ sono ruotati di un angolo $\theta$ rispetto agli assi $x$, $y$, i corrispondenti versori sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta \\ \hat{y}' &= -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta \end{aligned}$$

# 3 Moti in due dimensioni

**Esercizio 3.1** Un aereo in picchiata si muove con velocità costante di modulo $|\vec{v}| = 360\,km/h$, mantenendo un'inclinazione costante $\alpha = -\pi/6\,rad$ rispetto all'orizzontale. Ad un'altezza $h = 800\,m$ l'aereo sgancia una prima bomba e dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 1\,s$ una seconda bomba. Si calcoli (trascurando la resistenza dell'aria) la distanza $d$ tra i punti in cui le bombe raggiungono il suolo.

**Esercizio 3.2** Un corpo sale scivolando senza attrito lungo un piano inclinato di $\alpha = \pi/4\,rad$ rispetto all'orizzontale, soggetto ad una accelerazione diretta verso il basso (e parallela al piano inclinato) di modulo $|\vec{a}| = g\sin\alpha$ (vedi la Figura 4). L'altezza del piano inclinato è $\overline{OB} = h = 45\,cm$ e la velocità $|\vec{v_0}|$ che il corpo possiede nel punto $A$ è doppia di quella che gli permetterebbe di arrivare in $B$ con velocità nulla. Si calcoli la lunghezza del segmento $\overline{OC}$.

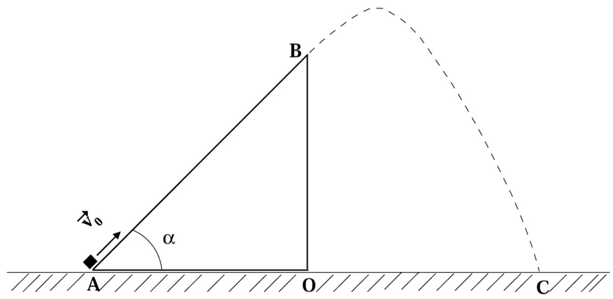


Figura 4: relativa all'esercizio **3.2**

**Esercizio 3.3** Un corpo puntiforme viene lanciato da un'altezza $h_1 = 10\,m$ rispetto alla superficie di un lago, che è profondo $h_2 = -5\,m$ (vedi la Figura 5). La velocità iniziale del corpo è: $|\vec{v_0}| = 10\,m/s$ e il vettore forma un angolo $\alpha = 30°$ con il semiasse positivo delle $x$.

Supponendo che l'effetto della resistenza dell'acqua sul moto del corpo, senza gravità, sia quello di decelerarlo nelle due direzioni $x$ e $z$ della stessa quantità indipendentemente dai valori della velocità, e che quindi all'accelerazione di gravità si sommi un'accelerazione con componenti, relativamente agli assi così come appaiono in figura, $a_x = -3\,m/s^2$ e $a_z = 3\,m/s^2$, calcolare: **(a)** le coordinate del corpo sul fondo del lago; **(b)** il tempo impiegato dal corpo per percorrere l'intera traiettoria.

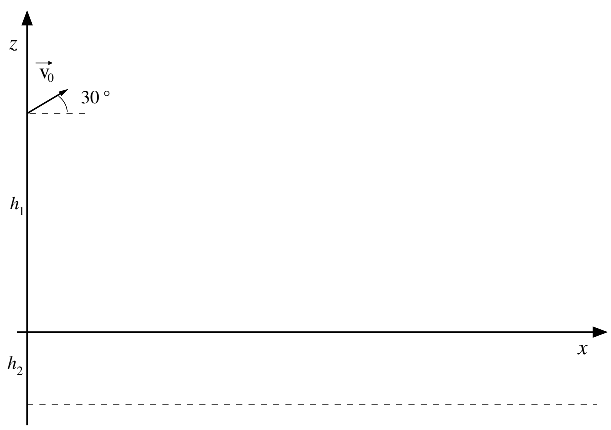


Figura 5: relativa all'esercizio **3.3**

**Esercizio 3.4** Ad un'altezza dal suolo $h = 7.1\,m$ si lancia orizzontalmente con velocità $|\vec{v_0}| = 9.1\,m/s$ una pallina di gomma: la situazione è rappresentata schematicamente nella Figura 6.

**a)** Si calcoli la distanza $l_1$ da $O$ del punto $P_1$ nel quale la pallina tocca terra, le componenti secondo gli assi $x$ e $z$ del vettore velocità $\vec{v}_1$ e l'angolo $\alpha$ che questo forma con il semiasse positivo delle $x$ al momento dell'urto.

Nell'urto si ha una diminuzione del modulo della velocità: la componente della velocità secondo l'asse $x$, subito dopo l'urto, risulta inferiore del 20 % al valore che aveva subito prima dell'urto, la componente secondo l'asse $z$ cambia segno e in valore assoluto diminuisce del 20 %.

**b)** Si calcoli l'altezza massima raggiunta dopo il primo rimbalzo e la distanza $l_2$ da $O$ del successivo punto $P_2$ di urto della pallina sul suolo.

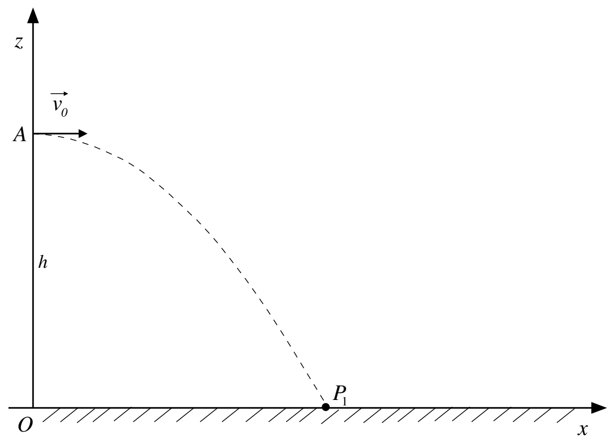


Figura 6: relativa all'esercizio **3.4**

**Esercizio 3.5** Sono date due traiettorie del moto di un punto materiale in un piano (spazio fisico a 2-dimensioni), nel quale sia stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $x - y$ (con $u = 1\,m$), e per ciascuna di esse sia dato l'andamento col tempo della coordinata $x$, cioè la funzione $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 : \quad y &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \qquad ; \qquad x(t) = \frac{3}{2}\, t^2 \\
\gamma_2 : \quad y &= \frac{x^2}{4} - 1 \qquad ; \qquad x(t) = 2\, t\ .
\end{aligned}
$$

Caratterizzare i due moti analiticamente e graficamente: scrivere la legge oraria in maniera completa, le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}(t)$ e così anche del vettore $\vec{a}(t)$, i due moduli (sempre in funzione del tempo) e rappresentare questi vettori, nel sistema $x - y$, in corrispondenza delle posizioni a $t_1 = -2\,s$, $t_2 = -1\,s$, $t_3 = 0\,s$ e $t_4 = 2\,s$.

**Esercizio 3.6** Usare un foglio elettronico per studiare il moto parabolico di un corpo puntiforme soggetto alla accelerazione di gravità in un piano verticale $x - y$. Si può usare la guida all'uso di EXCEL che è sulla pagina-web "http://people.na.infn.it/clarizia/", per imparare i rudimenti.

| t | x | y | $v_x$ | $v_y$ | $v_s$ | $\alpha$ (radianti) | $\alpha$ (gradi) | $\Delta t$ | $v_0$ | $\alpha_0$ | $h_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Figura 7: relativa all'esercizio **3.6**

Dalla Figura 7 si può trarre spunto per il contenuto della prima riga del foglio: questa riga sta ad indicare semplicemente quello che andrà inserito nelle colonne sottostanti, mediante le opportune formule; $v_s$ indica la velocità scalare, $\alpha$ indica l'angolo della velocità con il semiasse positivo delle

$x$. Le ultime 4 etichette indicano i parametri che vanno inseriti sotto e possono essere cambiati a piacere; questi valori non vanno inseriti direttamente nelle formule delle colonne precedenti, ma va inserita l'etichetta della cella (con i dollari) in modo che, una volta cambiato il valore, tutte le colonne vengano ricalcolate automaticamente e così anche il grafico. In questo caso: $\Delta t$ è il "passo" temporale con cui si vogliono ottenere i punti del grafico; $v_0$ è il modulo della velocità iniziale, mentre $\alpha_0$ è l'angolo iniziale di questa velocità (Memento: si può esprimerlo in gradi, ma va ricalcolato in radianti nella cella sotto e a questa dovranno fare riferimento le formule di seno e coseno); $h_0$ è l'altezza iniziale del lancio.

**Esercizio 3.7** Si consideri un vettore $\vec{A}(t)$ che ruoti nel tempo, nel piano $x-y$, mantenendo costante il suo punto di applicazione e il suo modulo, secondo la legge oraria:

$$\vec{A}(t) = A\cos(\omega t)\,\hat{x} + A\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

dove $\omega$ e $A$ sono costanti. Si trovi $d\vec{A}/dt$ (si noti che $\hat{x}$ e $\hat{y}$ si comportano come costanti nella derivazione). Si dimostri che $d\vec{A}/dt$ è perpendicolare ad $\vec{A}$ e si introduca un opportuno vettore $\vec{\omega}$ (quale?) tale che $d\vec{A}/dt = \vec{\omega} \times \vec{A}$.

**Esercizio 3.8** All'istante $t = 0$ un'automobile, partendo da ferma dal punto $P_0$, si mette in movimento lungo una pista circolare di raggio $R = 100\,m$ (si può far riferimento alla Figura 8 dell'esercizio successivo). Nella prima fase del moto l'andamento con il tempo dell'ascissa curvilinea $s$ è $s(t) = c\,t^3$ con $c^{-1} = 120\,s^3/m$. Si calcoli l'istante $t_1$ in cui i moduli delle componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione sono uguali.

**Esercizio 3.9** Su una pista circolare ($R = 150\,m$) un punto materiale, inizialmente fermo, si muove con accelerazione tangenziale costante, fino ad un istante $t_1$ in cui $\vec{v}$ e $\vec{a}$ formano un angolo di 45°; poi, mantiene costante la sua velocità. Dall' istante in cui è partito fino a quello in cui completa un giro di pista, trascorrono $2\,min$.

Calcolare lo spazio $s_1$ percorso sulla traiettoria fino all'istante $t_1$, la velocità raggiunta in questo istante, il valore del tempo $t_1$ e l'accelerazione $a_t$ del primo tratto (utilizzare la Figura 8 per immaginare e disegnare per proprio conto l'intero moto del punto materiale).

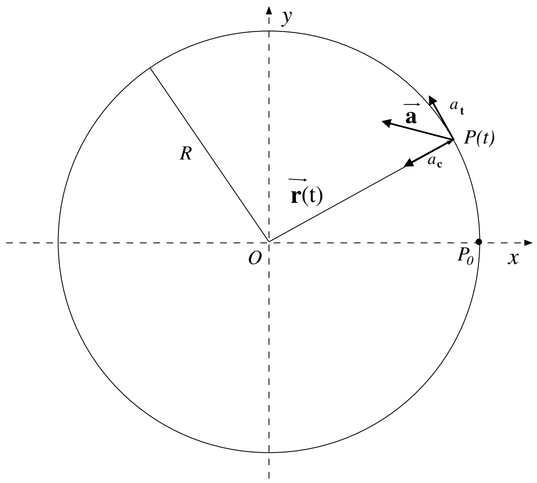


Figura 8: relativa agli esercizi **3.8**, **3.9** e **3.10**

**Esercizio 3.10** Un'auto parte da ferma su di una pista circolare di raggio $R = 100\,m$ e comincia a muoversi con accelerazione tangenziale di modulo costante (vedi la Figura 8 dell'esercizio precedente). Ad un certo istante $t_1$, in cui ha raggiunto una velocità $v_1 = 50\,km/h$ ed una accelerazione (totale) $\vec{a}_1$ il cui modulo è $|\vec{a}_1| = 10\,m/s^2$, l'auto comincia a frenare con accelerazione tangenziale di modulo costante.

Determinare le componenti del vettore accelerazione $\vec{a}_2$, nel sistema di riferimento in figura, all'istante $t_2 = 10\,s$, sapendo che l'auto ha percorso uno spazio complessivo, dal punto iniziale $P_0$, di $100\,m$. Si può dunque scrivere, introducendo un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria, con origine in $P_0$, che $s_2 = s(t_2) = 100\,m$.

# 4 Moti relativi

**Esercizio 4.1** Un'automobile della Polizia sta viaggiando con una velocità costante $v_P = 90\,km/h$ su un tratto rettilineo di un'autostrada, lungo il quale c'è un limite di velocità di $110\,km/h$. Gli agenti notano un'automobile rossa che procede nella stessa direzione e nello stesso verso $1\,km$ dietro. Dopo $2\,min$ l'automobile rossa raggiunge l'auto della Polizia, ma non la sorpassa, frenando la sua corsa. Gli agenti sono in grado di valutare la velocità media relativa dell'auto rossa e quindi la bloccano per contestarle la contravvenzione. Qual è la velocità media relativa e quale quindi la velocità media dell'automobile rossa rispetto al suolo?

**Esercizio 4.2** Un cannone piazzato sulla costa, su una roccaforte, all'altezza di $h = 30\,m$ sul livello del mare, spara un proiettile contro una nave che sta procedendo direttamente verso il cannone a una velocità di modulo $|\vec{V}| = 60\,km/h$. All'istante dello sparo la distanza della nave è $L = 37\,km$. La velocità iniziale (velocità alla bocca) del proiettile è $|\vec{v}_0| = 600\,m/s$ e l'angolo che questo vettore forma con l'orizzontale (angolo di alzo) è $\alpha = 40°$. Si trascuri la resistenza dell'aria. Calcolare:

**a)** a quale distanza dalla nave cadrà il proiettile;

**b)** a quale altezza e con quale velocità in modulo, rispetto al mare, passerà il proiettile sulla verticale della nave.

**Esercizio 4.3** Supponiamo di essere in un ascensore fermo a un piano quando all'improvviso il cavo di sospensione si rompe e, non funzionando i freni, l'ascensore comincia a cadere liberamente.

**(a)** Se, nello stesso istante in cui l'ascensore comincia a cadere, lasciamo cadere le nostre chiavi da $1\,m$ sopra il pavimento, quanto tempo impiegheranno per raggiungere il pavimento?

**(b)** Supponiamo ora che, dopo che l'ascensore è caduto di un piano ($3.3\,m$), ad un istante $t_0$ i freni rientrino in funzione e rallentino l'ascensore con un'accelerazione costante. Se l'ascensore si arresta dopo altri 4 secondi, quanto cammino ha percorso, a partire da $t_0$, quando le chiavi colpiscono il pavimento?

**Esercizio 4.4** Dalla sommità di un piano inclinato privo di attrito si lascia cadere un corpo con velocità $\vec{v}_0$ diretta lungo il piano inclinato; nello stesso istante il blocco che costituisce il piano inclinato viene lasciato cadere, ed esso cade verso il basso con accelerazione uguale a quella di gravità. Si determini il moto del corpo, sia nel sistema fisso (moto assoluto) sia nel sistema solidale con il piano inclinato (moto relativo).

**Esercizio 4.5** Un vaporetto attraversa un lago andando in linea retta dalla città **M** alla città **N**, che distano $20\,km$. La sua velocità in assenza di corrente nel lago è costante e il suo modulo è uguale a $|\vec{v}| = 10\,km/h$. Il lago è sede di correnti che variano con la stagione.

**a)** Quanto dura un viaggio di andata e ritorno in assenza di corrente?

**b)** Quanto dura un viaggio di andata e ritorno se una corrente si muove da **M** ad **N** con velocità di modulo $|\vec{u}| = 5\,km/h$ lungo la retta che congiunge le due città?

**c)** Quanto dura un viaggio di andata e ritorno se una corrente si muove con velocità di modulo $|\vec{u}| = 3\,km/h$ lungo una retta ortogonale alla congiungente **M**–**N**?

**Esercizio 4.6** Una nave fa 23 *nodi* con rotta Nord-Est e si trova in una corrente di 3 *nodi* diretta da Ovest a Est; si determini l'angolo di deriva (l'angolo tra la velocità relativa e la velocità assoluta), la rotta effettiva e la velocità assoluta (in metri al secondo). [1 *nodo* = 1 *miglio nautico all'ora* essendo 1 *miglio nautico* = $1852\,m$]

**Esercizio 4.7** Una barca che in acqua ferma può muoversi con una velocità $|\vec{v}|$ attraversa un fiume in un tratto rettilineo largo $d$, nel quale l'acqua scorre con velocità costante $|\vec{V}|$. Si determini la distanza $l$ tra il punto di partenza e il punto di approdo della barca nel caso in cui la sua rotta sia costante ed uguale a $\alpha$ (angolo misurato rispetto alla direzione della riva di partenza).

**Esercizio 4.8** La pioggia cade verticalmente con una velocità di $10\,m/s$; un uomo cammina con una velocità di $6\,km/h$; qual è la migliore inclinazione che egli può dare all'ombrello?

**Esercizio 4.9** Un uomo che corre a $14\,km/h$ verso Ovest osserva il vento provenire da Nord-Ovest; riducendo la propria velocità a $6\,km/h$ osserva il vento provenire da Nord. Trovare la direzione del vento rispetto alla terra e la sua velocità.

**Esercizio 4.10** Un piroscafo naviga in acqua ferma a velocità costante di 12 *nodi*; se naviga verso Est il vento appare, ad un osservatore sulla nave, provenire da Nord; se naviga verso Sud il vento appare provenire da Nord-Ovest. Trovare la direzione del vento rispetto alla terra e la sua velocità.

**Esercizio 4.11** Nel canale disegnato nella Figura 9 la corrente è praticamente nulla in ogni punto $x < 1\,km$ e ha una velocità $V_y = -10\,km/h$ in ogni punto $1\,km < x < 2\,km$. Partendo dal punto $A$ della Figura:

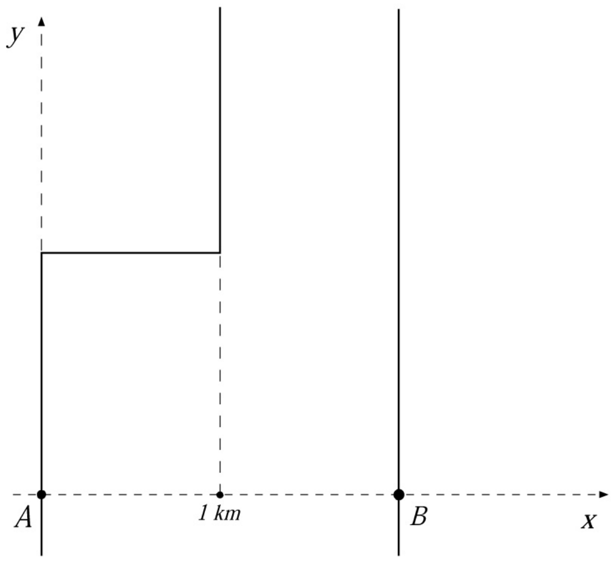


Figura 9: relativa all'esercizio **4.11**

**a)** in che direzione, fissa per tutto il tragitto, deve puntare la prua di un battello, che procede, rispetto all'acqua, con velocità in modulo costante $|\vec{v}| = 20\,km/h$, affinché approdi sull'altra sponda esattamente nel punto $B$ della Figura?

**b)** In quanto tempo avviene l'attraversamento?

**Esercizio 4.12** Una trave è poggiata sopra un rullo cilindrico di raggio $r = 25\,cm$. Si spinge la trave facendola avanzare di un tratto $l = 4\,\pi\,m$, corrispondentemente il rullo ruota senza scivolare lungo la trave. Si calcoli il numero $N$ di giri compiuti dal rullo nei due casi seguenti:

**a)** il rullo è vincolato a ruotare intorno al proprio asse;

**b)** il rullo rotola sul suolo (senza strisciare).

**Esercizio 4.13** Una piattaforma ruota con velocità angolare costante $\omega$ attorno ad un asse centrale verticale (vedi Figura 10). All'istante $t = 0$ una pallina viene lanciata orizzontalmente con velocità $\vec{v}_0$ dal centro della piattaforma; l'attrito che la pallina incontra è trascurabile, cosicché essa si muove rispetto a terra di moto rettilineo uniforme. Si determini l'accelerazione della pallina, ad un generico istante, rispetto ad un riferimento solidale alla piattaforma.

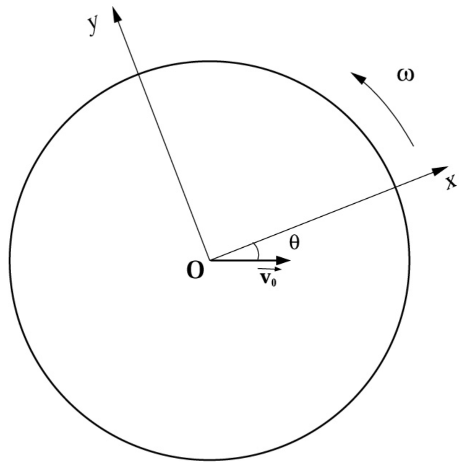


Figura 10: relativa all'esercizio **4.13**

**Esercizio 4.14** Una bicicletta le cui ruote hanno un raggio pari a $R$ percorre una strada fangosa a una velocità costante, diretta lungo l'asse $x$, e pari in modulo a $|\vec{V}|$.

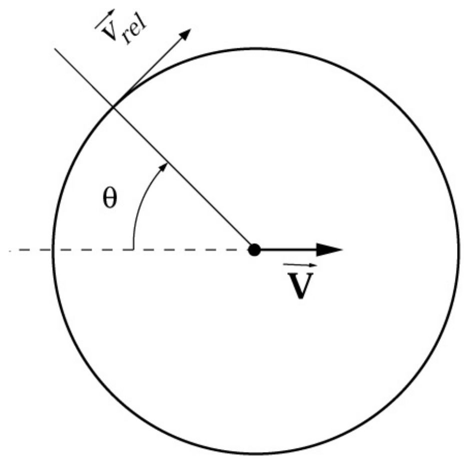


Figura 11: relativa all'esercizio **4.14**

**a)** Nell'ipotesi di rotolamento, determinare la velocità angolare $\omega$ della ruota.

**b)** Determinare, in funzione dell'angolo $\theta$ (angolo, considerato qui positivo, che il raggio forma nel verso orario con il semiasse indicato in Figura 11), le componenti orizzontale $v_x(\theta)$ e verticale $v_z(\theta)$ della velocità assoluta del punto generico sul bordo esterno della ruota.

**c)** Dalla ruota si staccano delle piccole particelle di fango. Esaminando la dipendenza dall'angolo $\theta$ della sola componente verticale del moto di tali particelle, determinare l'angolo $\theta_M$ da cui si staccano le particelle che raggiungono la massima altezza $h_M$ rispetto al suolo e il valore di $h_M$.

APPLICAZIONE NUMERICA: $R = 40\,cm$; $|\vec{V}| = 15\,km/h$.

**Esercizio 4.15** Il moto piano di una particella è descritto, in coordinate polari, dalle seguenti equazioni:

$$r(t) = a\,t \quad ; \quad \theta(t) = b\,t,$$

con $a$ e $b$ costanti positive.

**a)** Si disegni un grafico qualitativo della traiettoria.

**b)** Si calcolino le componenti radiali ($\hat{\rho}$) e trasversali ($\hat{\eta}$) della velocità e dell'accelerazione.

**c)** Si calcolino le componenti cartesiane ($\hat{x}$ e $\hat{y}$) della velocità e dell'accelerazione.

**d)** Si calcoli il modulo del vettore $\vec{v}(t)$ con i risultati ottenuti in **b)** e si verifichi che la medesima espressione si ottiene utilizzando i risultati ottenuti in **c)**.

Si rifletta sul fatto che il moto della particella si può considerare composto da due moti, quali? E si reinterpritino i risultati alla luce di quanto studiato sui moti relativi.

**Esercizio 4.16** In prossimità della superficie terrestre un corpo si muove, per il solo effetto del peso, con accelerazione costante diretta verso il basso e di modulo pari all'accelerazione di gravità $g$. Consideriamo il moto di caduta libera del corpo, in un sistema di riferimento $x - z$, trascurando la resistenza dell'aria. Il corpo parte da una quota $z_0 = h$ con una velocità avente componenti $v_x = v_0$ e $v_z = 0$. Si ricavino, per ogni istante, la componente tangenziale e quella normale dell'accelerazione ed il raggio di curvatura della traiettoria.

# RISPOSTE "Unità A"

**1.1** – B sorpassa A ; $x = 52.3\,km$ ; $t = 1.25\,h = 1^h 15^m$ $(= 1.247\,h = 1^h 14^m 48^s)$

**1.3** – $(\Delta t)_B = 70\,s$ ; $(\Delta x)_B = 2.8\,km$

**1.4** – **a)** $t_c = 2\,s$ **b)** $v_{2,1}(t_c) \equiv v_2(t_c) - v_1(t_c) = 8\,m/s$

**1.5** – **b)** $t_2 = 18\,s$ **c)** $s_2 = 180\,m$

**1.6** – **a)** $t_2 = 29.1\,s$, $s_2 = 583\,m$ **b)** $v_P(t_2) = 174\,km/h$

**1.7** – **a)** $\Delta t = 16\,s$, $a = 0.87\,m/s^2$ **b)** $v_{1\text{eff}} = 8\,km/h$, $v_{2\text{eff}} = 72\,km/h$, $a_{\text{eff}} = 0.99\,m/s^2$

**1.9** – $T = 125\,s$ $S(T) \simeq 2080\,m$

**1.10** – $N = 75$

**1.11** – $v_0 = 24.9\,m/s$ $h = z_{\max} = 31.6\,m$

**1.12** – **a)** $v_0 = 16.2\,m/s$, $V(t^*) = -24.2\,m/s$, $v(t^*) = -8\,m/s$ **b)** $v_{0\min} = 12.5\,m/s$

**1.13** – $t_{\text{tot}} = 3.14\,s$ $H = 48.5\,m$

**2.1** – $|\vec{AD}| = 11.2\,km$ , $2.3°$ a nord dell'est

**2.2** – $\vec{A} \perp \vec{C}$ $\vec{A} \perp \vec{D}$ $\vec{B} \perp \vec{C}$

**2.3** – $B_A\,\hat{A} = 0.82\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$ ; $C_A\,\hat{A} = 0$ ; $D_A\,\hat{A} = 0$ ; $E_A\,\hat{A} = 10.6\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$

**2.4** – $|\vec{B}| = 2\sqrt{31}\,u$ ; $\theta = 128.9°$

**2.5** – $|\vec{D}| = 2\sqrt{21}\,u$ ; $\beta = 70.9°$

**2.6** – **a)** $\vec{F} = -2\,\vec{D}$ **b)** Esse sono proporzionali.

**2.7** – Essi soddisfano la: $\vec{A} \pm \vec{B} \pm \vec{C} = 0$

**2.8** – $|\vec{p}_3| = 70\,g_{\text{peso}}$ $\beta = 21.8°$ $\alpha = 38.2°$

**2.9** – $\vec{C} = c(-9\,\hat{\imath} + 13\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k})$ $c \in \mathbf{R}$

**2.10** – $\hat{n} = \pm(0.25\,\hat{\imath} + 0.89\,\hat{\jmath} - 0.38\,\hat{k})$

**2.11** – **a)** $\sin\theta = 1$ **b)** Area $= 2.1$

**2.12** – $\varphi_{12} = 97.2°$ , $\varphi_{23} = 138.6°$ , $\varphi_{31} = 124.2°$

**2.13** – Da dimostrare graficamente.

**3.1** – $d \simeq 54\,m$

**3.2** – $\left|\overline{OC}\right| = 3.1\,m$

**3.3** – $x_f \simeq 20\,m$ $t_{\text{tot}} = 2.3\,s$

**3.4** – **a)** $l_1 = 11\,m$, $v_{1x} = 9.1\,m/s$, $v_{1z} = -12\,m/s$, $\alpha = -52°$
**b)** $z_{\max} = 4.54\,m$, $l_2 = 25\,m$

**3.5** – Da svolgere analiticamente e graficamente.

**3.6** – Da svolgere praticamente con un foglio elettronico.

**3.7** – $\frac{d\vec{A}}{dt} = \omega A\,(-\hat{x}\sin(\omega t) + \hat{y}\cos(\omega t))$ ; $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ ; $\vec{\omega} = \omega\,\hat{z}$

**3.8** – $t_1 = 20\,s$

**3.9** – $s_1 = 75\,m$ $v(t_1) = 8.5\,m/s$ $t_1 = 17.7\,s$ $a_t = 0.48\,m/s^2$

**3.10** – $a_{2x}(t_2) \simeq 0.4\,m/s^2$ $a_{2y}(t_2) \simeq -0.8\,m/s^2$

**4.1** – $v_{m\text{rel}} = 30\,km/h$ $v_{m\text{ass}} = 120\,km/h$

**4.2** – **a)** $d \simeq 0.5\,km$ **b)** $h \simeq 0.4\,km$, $v \simeq 0.6\,km/s$

**4.3** – **a)** Le chiavi non si muoveranno, rispetto al sistema mobile.
**b)** $s = 3.14\,m$ (spazio percorso da quando entrano in funzione i freni)

**4.4** – $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y(t) = -v_0 \sin\alpha\, t - \dfrac{1}{2}\, gt^2$

**4.5** – **a)** $T = 4\,h$ **b)** $T = 5^h\, 20^m$ **c)** $T = 4^h\, 11.6^m$

**4.6** – $\theta_{\rm der} = -4.8°$ $\varphi = 40.2°$ a nord dell'est $v = 25.2$ nodi $= 13\, m/s$

**4.7** – $l = \dfrac{d}{|\vec{v}|\, \sin\alpha} \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{V}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{V}|\, \cos\alpha}$

**4.8** – Rispetto alla verticale verso l'alto: $\varphi = 9.5°$ in avanti.

**4.9** – $\varphi = 36.9°$ ad ovest del sud $v_V = 10\, km/h$

**4.10** – $\varphi = 63.4°$ a sud dell'est $v_V = 26.8$ nodi

**4.11** – **a)** $\varphi = 14.5°$ (rispetto al semiasse positivo delle $x$) **b)** $T = 6^m\, 12^s = 372\, s$

**4.12** – **a)** $N = 8$ **b)** $N = 4$

**4.13** – $a_x = -2\,\omega v_0 \sin(\omega t) - v_0\omega^2 t \cos(\omega t) \qquad a_y = -2\,\omega v_0 \cos(\omega t) + v_0\omega^2 t \sin(\omega t)$

**4.14** – **a)** $|\omega| = 10.4\, s^{-1}$ **b)** $v_x(\theta) = V_x + |\vec{V}|\sin\theta \qquad v_z(\theta) = |\vec{V}|\cos\theta$

**c)** $\theta_M = 13.1°$ $h_M = 1.33\, m$

**4.15** – **b)** $v_\rho = a, \quad v_\eta = abt; \qquad a_\rho = -ab^2 t, \quad a_\eta = 2\, ab$

**c)** $\begin{cases} v_x = a\cos(bt) - abt\sin(bt) \\ v_y = a\sin(bt) + abt\cos(bt) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = -2\, ab\sin(bt) - ab^2 t\cos(bt) \\ a_y = 2\, ab\cos(bt) - ab^2 t\sin(bt) \end{cases}$

**d)** $|\vec{v}(t)| = \sqrt{a^2 + a^2 b^2 t^2}$

**4.16** – $a_T(t) = \dfrac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \qquad a_N(t) = \dfrac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \qquad r_{\rm curv} = \dfrac{1}{g v_0}\left(v_0^2 + g^2 t^2\right)^{3/2}$